

Ha $n = 0$, akkor $2^n - 1 = 0 = 0^k$, ha pedig $n = 1$, akkor $2^n - 1 = 1 = 1^k$. Megmutatjuk, hogy ha $n \geq 2$, $k \geq 2$ és a természetes szám, akkor a

$$(1) \quad 2^n - 1 = a^k$$

egyenlőség nem állhat fenn. Tegyük fel ennek ellenkezőjét. Mivel $n \geq 2$, ezért (1) bal oldalán páratlan szám áll, így szükségképpen a is páratlan. Két esetet különböztetünk meg aszerint, hogy k páros-e vagy páratlan.

Ha k páros, akkor a^k egy páratlan egész számnak, $a^{k/2}$ -nek a négyzete. (1) mindkét oldalából 1-et kivonva:

$$2^n - 2 = (a^{k/2})^2 - 1, \quad \text{vagyis}$$

$$(2) \quad 2(2^{n-1} - 1) = (a^{k/2} - 1)(a^{k/2} + 1)$$

adódik. A jobb oldalon két páros szám szorzata áll, míg a bal oldal második tényezője az n -re vonatkozó feltevésünk szerint páratlan, így a bal oldal nem osztható 4-gyel. Ez azt jelenti, hogy ebben az esetben (1) nem állhat fenn.

Ha k páratlan, akkor adjunk (1) mindkét oldalához 1-et. Páratlan k -ra a^{k+1} szorzattá alakítható, tehát most

$$(3) \quad 2^n = a^k + 1 = (a + 1)(a^{k-1} - a^{k-2} + \dots - a + 1).$$

A jobb oldali szorzat második tényezője páratlan, hiszen az összeg páratlan sok tagból áll és minden egyes tag páratlan. Ez a szám osztója a bal oldalon álló 2 hatványnak, tehát értéke csak 1 lehet. Ez azt jelenti, hogy

$$a^k + 1 = (a + 1)1, \quad \text{vagyis}$$

$$a^k = a.$$

Mivel $k > 1$, ebből $a = 0$ vagy $a = 1$ adódik, de $n \geq 2$ miatt $2^n - 1 \geq 3$, vagyis páratlan k -ra sem kapunk megoldást.

Összefoglalva, $2^n - 1$ csak $n = 0$ vagy $n = 1$ esetén egyenlő valamely természetes szám második, vagy annál nagyobb egész kitevős hatványával.