

Jelöljük a derékszögű háromszög csúcsait A, B, C -vel, a gúla negyedik csúcsát D -vel. Bocsássunk D -ből merőlegest az AB, BC, CA oldalakra és az alapsíkra, a talppontok rendre E, F, G és O (1. ábra).

1984-03-115-2.eps

1. ábra

A DOE, DOF, DOG derékszögű háromszögekben az E -nél, F -nél, G -nél található hegyesszög az oldallapoknak az alapsíkkal bezárt szöge. Tudjuk ugyanis, hogy két sík hajlásszögét a metszésvonaluk egy pontjába a síkokon belül állított merőleges egyenesek szöge méri, és például DE és OE is merőleges AB -re (ez a „három egymásra merőleges egyenes” néven ismert tételből adódik). Ezek a szögek tehát a feltétel alapján mind β -val egyenlők, továbbá a háromszögek DO befogója közös, következésképpen a DOE, DOF, DOG háromszögek egybevágók, és így $OE = OF = OG$. Az O pont tehát az ABC háromszög beírt körének középpontja.

Válasszunk az AD élen egy tetszőleges P pontot. P -ben állítsunk merőlegest AD -re az ABD és ACD síkokban, messék ezek az AB , ill. AC egyeneseket a P_1 , ill. P_2 pontokban. Az ABD és ADC síkok hajlásszöge definíció szerint a PP_1 és PP_2 félegyeneseinek szöge, azaz a PP_1P_2 háromszög P csúcsánál levő szög.

Ezek után a szerkesztést a következőképpen végezhetjük el. Felvesszünk a gúla alapjához hasonló ABC derékszögű háromszöget. Ezt megtehetjük, hiszen az ABC háromszög egyik hegyesszöge, α , adott. Megszerkesztjük a beírt kör O középpontját és O -nak az oldalakra eső E, F, G vetületét (2. ábra).

1984-03-116-1.eps

2. ábra

A DOE derékszögű háromszögnek most már ismerjük az OE befogóját és a $DEO \angle = \beta$ szögét. A $DE = DF = DG$ átfogó, mely egyúttal az oldallapok magasságvonala, könnyen szerkeszthető. Az oldallapokon a D -ből induló magasságvonalak talppontjai az E, F ill. G pontok, így az ABD és ACD oldallapok ABD' és ABD'' leforgatottjait megszerkeszthetjük. Végül AD -n (melynek ábránkon két példánya szerepel) tetszőlegesen felvesszük a P pontot, azaz AD' -n egy P' és AD'' -n egy P'' pontot úgy, hogy $AP' = AP''$ legyen. Az ABD' háromszögben P' -nél merőlegest állítunk AD' -re, ez az AB oldalt P_1 -ben metszi; az ABD'' háromszögben az AD'' -re P'' -ben emelt merőleges AC -t P_2 -ben metszi. Végül vesszük azt a PP_1P_2 háromszöget, melynek oldalai $P_1P_2, P'P_1$ és $P''P_2$; ennek P -nél levő szöge az ABD és ACD lapok szöge.

A másik két oldallap hajlásszöge hasonlóan szerkeszthető.

Az α és β szögeknek hegyesszögeknek kell lenniük. Ezzel a megszorítással a kérdéses gúla létezik, és az (tükrözéstől és középpontos hasonlóságtól eltekintve) egyértelmű. Így a szerkesztést mindig végre lehet hajtani, és az – könnyen ellenőrizhető módon – helyes eredményt ad.

Megjegyzések. 1. A megoldásban nem használtuk ki, hogy a gúla alaplapja derékszögű háromszög, a szerkesztés tetszőleges alap esetén hasonlóan elvégezhető.

2. Belátható, hogy a PP_1P_2 háromszög mindig egyenlő szárú. A P pont megfelelő megválasztásával elérhető, hogy a P_1 pont E -vel, a P_2 pedig G -vel essen egybe. Így a szerkesztést a következőképpen is be lehet fejezni. A D' és D'' pontok szerkesztése után E -ből AD' -re, G -ből AD'' -re állítunk merőlegest, a talppontok legyenek P' , ill. P'' (3. ábra).

1984-03-117-1.eps

3. ábra

Az E középpontú, EP' sugarú és a G középpontú, $GP'' = EP'$ sugarú körök metszéspontja P . Az ABD és ACD lapok hajlásszöge megegyezik az EPG szöggel.