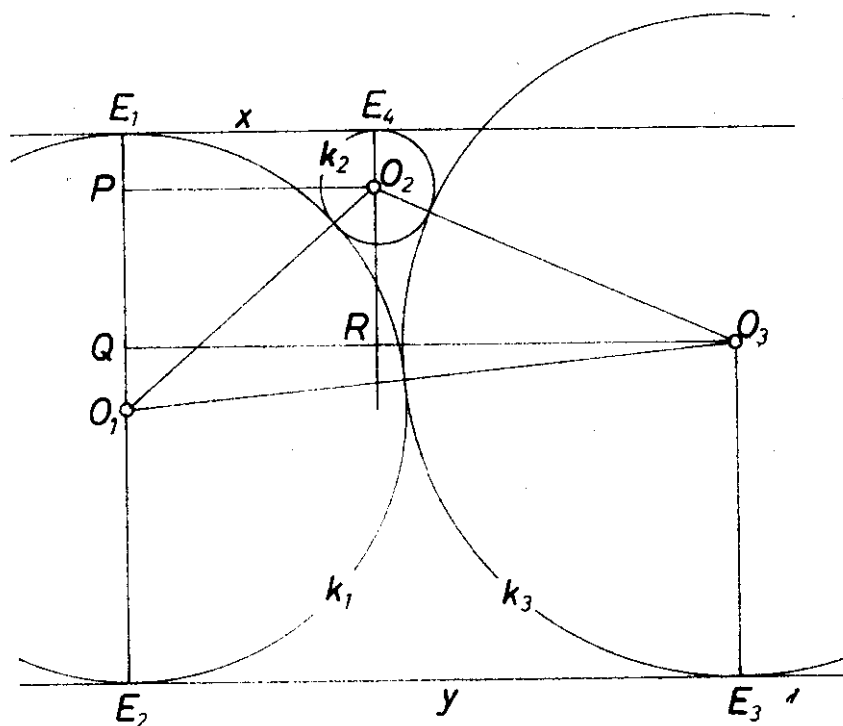
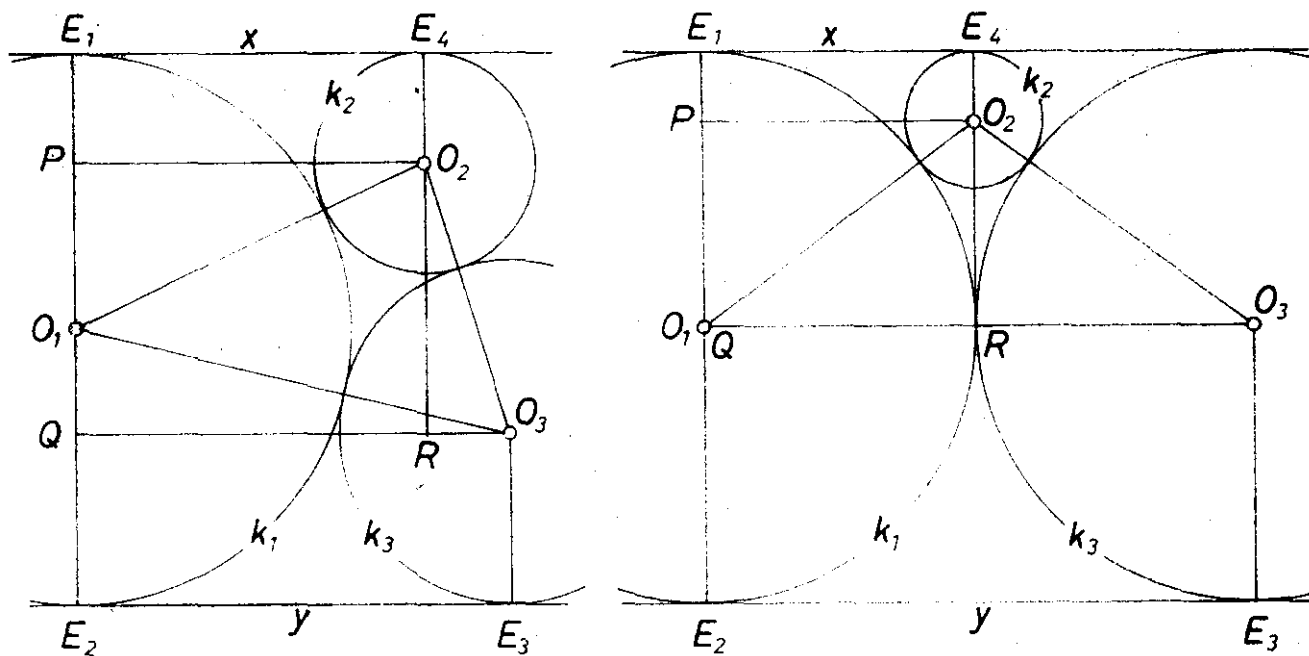


Legyen  $E_1$  és  $E_2$  a két párhuzamos érintőnek a  $k_1$  körrel közös pontja. A feladat feltételeiből következik, hogy a további érintési pontok az  $E_1E_2$  egyenesnek ugyanarra a partjára esnek. Jelölje a  $k_2$  körnek és az  $E_1$ -ben húzott érintőnek a közös pontját  $E_4$ ,  $k_3$  és az  $E_2$ -ben húzott érintő érintési pontját  $E_3$ . Legyen továbbá  $O_i$  a  $k_i$  középpontja ( $i = 1, 2, 3$ );  $O_2$ -nek az  $E_1E_2$ -re való merőleges vetülete  $P$ ,  $O_3$  vetülete  $E_1E_2$ -re  $Q$ , és  $O_2$  vetülete  $QO_3$ -ra  $R$ ,  $E_1E_4 = x$  és  $E_2E_3 = y$ .



Az  $r_2 \leq r_3$  választása mellett a körök háromféleképpen helyezkedhetnek el, aszerint, hogy  $r_3 > r_1$ ,  $r_3 < r_1$ , ill.  $r_3 = r_1$ . Mindhárom esetben létrejönnek az  $O_1PO_2$ ,  $O_1QO_3$ ,  $O_2RO_3$  (esetleg elfajuló) derékszögű háromszögek.



Felhasználva, hogy egymást kívülről érintő körök középpontjait összekötő egyenes áthalad a közös érintési ponton, és a középpontok távolsága a körök sugarának összege, e három háromszögre felírhatjuk Pitagorasz tételét:

$$\begin{aligned}
(1) \quad & (r_1 + r_2)^2 = x^2 + (r_1 - r_2)^2, \\
(2) \quad & (r_1 + r_3)^2 = y^2 + (r_1 - r_3)^2, \\
(3) \quad & (r_2 + r_3)^2 = (y - x)^2 + (2r_1 - r_2 - r_3)^2,
\end{aligned}$$

Az (1) összefüggésből  $x = 2\sqrt{r_1 r_2}$ , (2)-ből  $y = 2\sqrt{r_1 r_3}$ . Ezeket (3)-ba helyettesítve

$$(r_2 + r_3)^2 = (2\sqrt{r_1 r_3} - 2\sqrt{r_1 r_2})^2 + 4r_1^2 - 4r_1(r_2 + r_3) + (r_2 + r_3)^2,$$

ahonnan  $4r_2 r_3 = r_1^2$ . Ezt akartuk bizonyítani.

*Bangha Imre* (Győr, Czuczor G. Bencés Gimn., II. o. t.)  
dolgozata alapján