

Legyen az öt egész szám A, B, C, D és E . Az állítás bizonyításához elegendő igazolni, hogy $A^5 + B^5 + C^5 + D^5 + E^5 - (A + B + C + D + E)$ osztható 15-tel. Ez pedig azonnal adódik abból, hogy $n^5 - n$ osztható 15-tel, ha n egész. Így elegendő ezt igazolnunk.

Írjuk fel $(n^5 - n)$ -et szorzatként:

$$\begin{aligned} n^5 - n &= n(n^4 - 1) = n(n^2 - 1)(n^2 + 1) = n(n - 1)(n + 1)[(n^2 - 4) + 5] = \\ &= (n - 2)(n - 1)n(n + 1)(n + 2) + 5(n - 1)n(n + 1). \end{aligned}$$

Ez utóbbi összeg első tagja öt egymás utáni egész szám szorzata, tehát osztható 5-tel is és 3-mal is. A második tag három egymás utáni egész szám szorzatának – amely tehát osztható 3-mal – az ötszöröse, szintén osztható 15-tel.

Így $n^5 - n$ valóban osztható 15-tel, s ezzel a feladat állításának bizonyítását befejeztük.

Nem használtuk ki, hogy éppen öt számról van szó, az állítás akárhány egész számra igaz.

Zováth Mihály (Bp., Fazekas M. Gyak. Gimn., II. o. t.)