A legkisebb piros szám nyilván a $81 \cdot 1 + 100 \cdot 1 = 181$. Megmutatjuk, hogy 8100 kék. Ha ugyanis $8100 = 81x + 100y$ volna, ahol x és y pozitív egészek, akkor $81x$ osztható volna 100-zal. Mivel 81-nek és 100-nak nincs 1-nél nagyobb közös osztója, azért x is osztható volna 100-zal, vagyis $81x \geqq 8100$ lenne. Ekkor viszont y nem lehet pozitív.

Belátjuk, hogy n és $(8281 - n)$ közül az egyik piros, a másik kék. Ez egyúttal a feladat állítását is adja, hiszen ez éppen azt jelenti, hogy a 8281/2-re szimmetrikusan elhelyezkedő számok különböző színűek.

Először is, nem lehet n és $(8281 - n)$ is egyaránt piros. Ha mégis így volna, akkor pozitív egész x, y, x', y'-vel

$$n = 81x + 100y, \ 8281 - n = 81x' + 100y'.$$

Ezeket összeadva kapjuk, hogy

$$8100 = 81(x + x' - 1) + 100(y + y' - 1),$$

és itt $x + x' - 1$, valamint $y + y' - 1$ pozitív egészek. Így 8100 piros lenne, noha láttuk, hogy kék. Így tehát n és $8281 - n$ közül legalább az egyik kék.

Másodszor megmutatjuk, hogy ha n kék, akkor $8281 - n$ piros, azaz e két szám közül legfeljebb az egyik lehet kék. Mivel $21 \cdot 81 = 1701$, azért

$$81 \cdot (21n) + 100(-17n) = n. \tag{1}$$

Válasszuk meg a k egész számot úgy, hogy

$$0 < 21n - 100k \leqq 100$$

legyen, ekkor az $a = 21n - 100k$, $b = 81k - 17n$ kifejezéseket (1)-be téve

$$81a + 100b = n. \tag{2}$$

Itt a pozitív egész, n pedig kék, tehát b nem lehet pozitív, $b \leqq 0$. (2)-ből

$$8281 - n = 81 \cdot (101 - a) + 100(1 - b).$$

Ebben az előállításban $(101 - a)$ is és $(1 - b)$ is pozitív egész, – ezért $(8281 - n)$ piros.

Így n és $(8281 - n)$ közül legalább és legfeljebb az egyik, tehát pontosan az egyik kék, a másik piros. Tehát 8281/2 az állításnak megfelelő szám.

Megjegyzések. 1. A feladat szoros kapcsolatban áll az $ax + by = c$ alakú, úgynevezett diofantikus egyenletek vizsgálatával. Ebben az egyenletben a, b és c egészek, és a megoldásokat is az egész számok között keressük. Könnyen igazolható, hogy a fenti egyenletnek akkor és csak akkor van megoldása, ha c többszöröse a és b legnagyobb közös osztójának.

2. Ha a és b pozitív egészek, továbbá $(a, b) = 1$, akkor az $ax + bx = c$ egyenlet $c > ab$-re a pozitív számok körében mindig megoldható. Másfelől az $a + b \leqq c \leqq ab$ esetekben az $[a + b, ab]$ intervallum felezőpontjára szimmetrikusan elhelyezkedő számok közül pontosan az egyikre oldható meg az egyenlet.