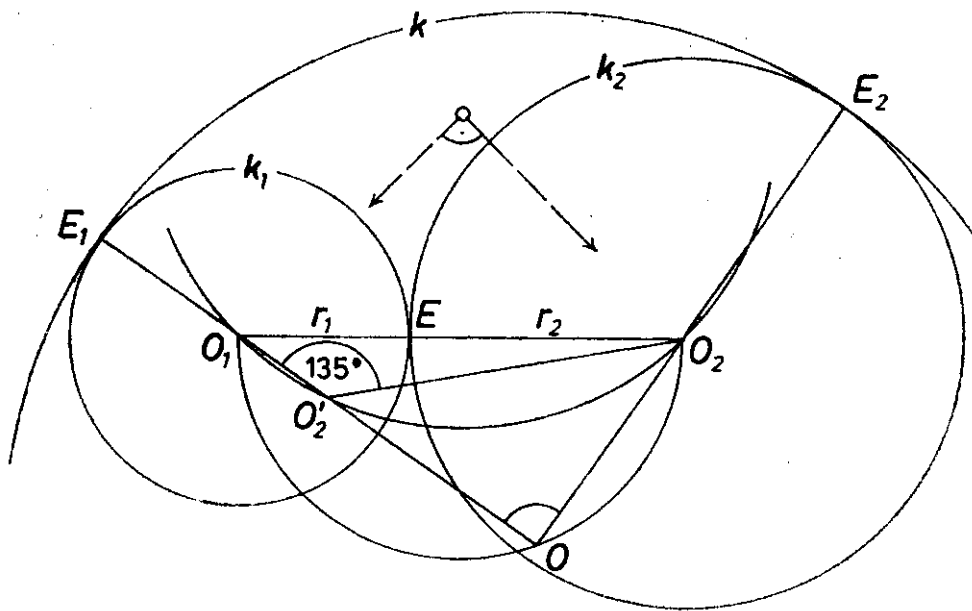


Jelöljük k_1 , k_2 sugarát rendre r_1 , r_2 -vel, középpontját O_1 , O_2 -vel, a k érintő kör középpontját O -val, sugarát R -rel, k és k_1 érintési pontját E_1 -gyel.



Az E_1O_1 félegyenes tartalmazza O -t és $R = E_1O > E_1O_1$, mivel k_1 belülről érinti k -t. Hasonlóképpen O az E_2O_2 félegyenesen is rajta van, ahol E_2 a k és k_2 körök érintési pontja. Továbbá azt is tudjuk, hogy az O_1O_2 szakasz tartalmazza a k_1 és k_2 körök E érintési pontját. A feltétel szerint az O_1OO_2 háromszög derékszögű és az előbbieket alapján

$$O_1O_2 = r_1 + r_2, \quad O_1O = R - r_1, \quad O_2O = R - r_2.$$

A Pitagorasz-tétel szerint tehát

$$(R - r_1)^2 + (R - r_2)^2 = (r_1 + r_2)^2,$$

ahonnan

$$R = \frac{r_1 + r_2 + \sqrt{(r_1 + r_2)^2 + 4r_1r_2}}{2}.$$

Csak a pozitív előjel jöhet szóba, mivel $r_1 + r_2 - \sqrt{(r_1 + r_2)^2 + 4r_1r_2} < 0$. Ha tehát a kör létezik, akkor sugara csak ennyi lehet. Ha $r_1 = r_2$, akkor az érintő kört könnyen meg tudjuk szerkeszteni, hiszen ekkor OO_1O_2 olyan egyenlő szárú derékszögű háromszög, melynek átfogója $O_1O_2 = r_1 + r_2$ adott. A derékszögű csúcs lesz k -nak O középpontja, és ha OO_1 szakaszt meghosszabbítjuk, míg a k_1 kört másodszor is metszi, megkapjuk az E_1 pontot, mely a k kör egy pontja.

Most tegyük fel, hogy $r_1 < r_2$. Ekkor $OO_2 < OO_1$. Mérjük fel O -ból az OO_1 félegyenesre az OO_2 távolságot, a végpontot jelöljük O'_2 -vel.

Az $O_1O_2O'_2$ háromszögben $O_1O_2 = r_1 + r_2$, $O_1O'_2 = (R - r_1) - (R - r_2) = r_2 - r_1$, és $O_2O'_2O_1 \sphericalangle = 135^\circ$. Ezek ismeretében az $O_1O'_2O_2$ háromszöget meg tudjuk szerkeszteni: Megrajzoljuk az O_1O_2 szakasz 135° -os látókörívét, és azt O_1 -ből elmetsszük az $r_2 - r_1$ távolsággal. Így megkapjuk O'_2 -t. Az O pont az $O_2O'_2$ fölé mint átfogó fölé emelt egyenlő szárú derékszögű háromszög csúcsa. Innen a k kört az előzőekhez hasonlóan kaphatjuk.

A szerkesztést mindig el tudjuk végezni, vagyis az érintő kör mindig létezik. Megoldásként mindig két kört kapunk, melyek tengelyesen tükrösek az O_1O_2 egyenesre.