

Az állítás nyilván csak akkor lehet igaz, ha minden kupac legalább egy kavicsot tartalmaz.

Jelölje az első esetben az egyes kupacokban levő kavicsok számát a_1, a_2, a_3, a_4 ; a második széttrakás esetén b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 . Az első széttrakás után az a_i darab kavicsot tartalmazó kupac minden kavicsára írjunk $1/a_i$ -t ($i = 1, 2, 3, 4$), a második széttrakás után pedig a b_i darab kavicsból álló kupac mindegyik kavicsára $1/b_i$ -t ($i = 1; \dots, 5$). Az első esetben a kavicsokra írt számok összege:

$$a_1 \cdot \frac{1}{a_1} + a_2 \cdot \frac{1}{a_2} + a_3 \cdot \frac{1}{a_3} + a_4 \cdot \frac{1}{a_4} = 4$$

a második esetben pedig a hasonló összeg nyilván 5.

Ezután minden kavicson vonjuk ki az elsőnek felírt számot a másodikból. Így minden kavicson egy $1/b_i - 1/a_j$ típusú különbség lesz. Egy kavics pontosan akkor került kisebb kupacba, ha $a_j > b_i$, azaz ha $\frac{1}{a_j} < \frac{1}{b_i}$, vagyis ha

$0 < \frac{1}{b_i} - \frac{1}{a_j}$, tehát ha a rajta levő különbség pozitív. Ezeknek a különbségeknek az összege $5-4=1$. Ha másodszorra

legfeljebb 1 kavics került volna kisebb kupacba, akkor legfeljebb egy kavicson lenne pozitív különbség. Ám ez $\frac{1}{b_i} \leq 1$, $\frac{1}{a_i} > 0$ miatt 1-nél kisebb lenne; a különbségek összege nem lehetne 1. Ezzel beláttuk, hogy másodszorra legalább két kavics kisebb kupacba került.

Teljesen hasonló módon bizonyítható, hogy ha n kupac kavicsot $n + k$ kupacba rakunk át, akkor legalább $k + 1$ kavics kisebb kupacba kerül.

Bujdosó László (Budapest, I. István Gimn., II. o. t.)

Megjegyzések. 1. A fenti (általánosított) eredmény nem javítható. Ha ugyanis eredetileg egy kupacban $k + 1$ db kavics van, akkor azokat szétrakhatjuk $k + 1$ db egy kavicsból álló kupacba, a többi kupacot pedig változatlanul hagyva pontosan $k + 1$ kavics kerül kisebb kupacba.

2. A megoldók jelentős része úgy értelmezte a feladatot, hogy az eredeti kupacok némelyikéből néhány kavicsot elveszünk, és ezekből hozzuk létre az ötödik kupacot, miközben az eredeti kupacok többi tagját változatlanul hagyjuk. Mivel így a feladat állítása nyilvánvaló, ezért ezek a dolgozatok nem kaptak pontot.