

I. megoldás. Mivel minden nem-negatív egész n -re $f(n)$ eleme az f függvény értelmezési tartományának, azért mind az a), mind a b) esetben f csak nem-negatív egész értékeket vehet fel.

a) Tegyük fel, hogy létezik ilyen f , és legyen $f(0) = a$. Ekkor a feltételt rendre a $0, a, 1, a+1, 2, a+2, \dots$ számokra alkalmazva kapjuk, hogy

$$\begin{array}{ll} f(a) = f(f(0)) = 1, & \longrightarrow f(1) = f(f(a)) = a + 1, \\ & \checkmark \\ f(a+1) = f(f(f(1))) = 2 & \longrightarrow f(2) = f(f(a+1)) = a + 2, \\ & \checkmark \\ & \vdots \\ & \checkmark \\ f(a+a-1) = f(f(a-1)) = a, & \longrightarrow f(a) = f(f(a+a-1)) = a + a. \end{array}$$

Így egyrészt $f(a) = 1$, másrészt $f(a) = a + a$, ami lehetetlen, hiszen a nem-negatív egész. Így az a) esetben a kérdéses függvény nem létezik.

b) Ilyen függvény viszont van, például az a függvény, amit a következőképpen definiálunk:

$$\begin{aligned} f(0) &= 0, \\ f(2^k(4m+1)) &= 2^k(4m+3), \\ f(2^k(4m+3)) &= 2^{k+1}(4m+1). \end{aligned}$$

Mivel minden pozitív egész egyértelműen írható föl $2^k p$ alakban, ahol p páratlan, k pedig nem-negatív egész, azért f -et valóban (egyértelműen) megadtuk. Ez az f teljesíti a b) feltételt:

Ha $n=0$, akkor $f(f(0)) = f(0) = 0 = 2 \cdot 0$,

Ha $n = 2^k(4m+1)$ alakú, akkor $f(f(n)) = f(2^k(4m+3)) = 2^{k+1}(4m+1) = 2n$.

Végül ha $n = 2^k(4m+3)$ alakú, akkor

$$f(f(n)) = f(2^{k+1}(4m+1)) = 2^{k+2}(4m+1) = 2n.$$

Több eset nincs, a feladatot megoldottuk.

II. megoldás. a b) feladatra. Meghatározzuk az összes, a feltételeket kielégítő f függvényt. Először is, f különböző helyeken nem vehet fel azonos értékeket. Ugyanis ha $f(a) = f(b)$, akkor

$$2a = f(f(a)) = f(f(b)) = 2b$$

alapján $a = b$.

Másodszor, $f(0) = 0$. Valóban, ha $f(0) = a$, akkor $f(a) = f(f(0)) = 2 \cdot 0 = 0$, így

$$a = f(0) = f(f(a)) = 2a,$$

amiből $a = 0$. Ez egyúttal azt is jelenti, hogy f a pozitív egész helyeken pozitív egész értékeket vesz föl.

A $2n = f(f(n))$ feltételt kétszer alkalmazva

$$(1) \quad f(2n) = f(f(n)) = 2f(n),$$

tehát elegendő f értékét a páratlan helyeken megadnunk, azokból a páros helyeken felvett értékek (1) ismételt alkalmazásával adódnak.

Legyen most $p \geq 1$ egy páratlan szám. Ha $f(p) = q$ páratlan, mondjuk azt, hogy a p párja q , s ekkor $f(q) = f(f(p)) = 2p$. Ha pedig $f(p)$ páros, mondjuk $f(p) = 2q$, akkor (1) szerint

$$2f(q) = f(2q) = f(f(p)) = 2p,$$

azaz $f(q) = p$. Mivel (1) alapján f páros helyeken páros értékeket vesz fel, és $f(q)$ páratlan, azért q is páratlan, és q -nak a párja p . Így minden páratlan szám valamelyik párnak vagy első, vagy második tagja, s természetesen egyetlen szám sem lehet egyszerre két párban.

Így ha f teljesíti a b)-ben előírt követelményt, akkor a pozitív páratlan egészek feloszthatók olyan $(p_0, q_0); (p_1, q_1); \dots$ párokba, hogy (mindjárt (1)-et is felhasználva)

$$(2) \quad \begin{aligned} f(0) &= 0, \\ f(2^k p_i) &= 2^k q_i; \quad f(2^k q_i) = 2^{k+1} p_i \end{aligned}$$

(i, k nem-negatív egészek).

Fordítva, akárhogyan is osztjuk párokba a pozitív páratlan egészeket, a (2) által definiált f függvény teljesíti az $f(f(n)) = 2n$ összefüggést.

Ezzel leírtuk az összes megfelelő függvényt. Az előző megoldásban megadott függvény a $p_k = 4k + 1$, $q_k = 4k + 3$ párbaoosztásból adódik.

Megjegyzés. A feladatot nagyon sokan félreértették, ugyanis megfeledeztek arról, hogy f mindkét esetben csak egész számokon van értelmezve, és így $f(n)$ -nek is egésznek kell lennie. Ez zárja ki a kézenfekvő $n + 1/2$, illetve $\sqrt{2n}$ megoldásokat.