

Megadunk egy jó elrendezést:

|                    |   |   |   |   |   |   |   |   |
|--------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a dobozok sorszáma | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| a golyók száma     | 1 | 1 | 3 | 4 | 2 | 4 | 6 | 8 |

Ha minden lépésben a legkisebb sorszámú kiüríthető dobozból vesszük ki a golyókat, akkor a táblázat mutatja, hogy az egyes lépések során hányas számú dobozt kell kiürítenünk. Látható, hogy a 29-edik lépés után valamennyi golyó az urnába kerül.

*Megjegyzés.* A fenti megoldást sokan megtalálták, többen igazolták azt is, hogy ez az egyetlen. Számos dolgozatból hiányzott azonban, hogy a dobozok kiürítése valóban megvalósítható.

A táblázat elkészítése és nyomon követése már itt is elég fáradtságos, több golyó esetén pedig még inkább az volna. Az alábbi gondolatmenet úgy ad módszert a megfelelő elrendezés elkészítésére, hogy egyúttal annak helyességét is bizonyítja.

Ha  $S_i$  jelöli az  $i$ -nél nem kisebb sorszámú dobozokban levő golyók számának összegét egy tetszőleges doboz kiürítése előtt,  $s_i$  pedig a doboz kiürítése után, akkor  $S_i - s_i$  értéke 0 vagy  $i$  aszerint, hogy az éppen kiürített doboz sorszáma kisebb-e, mint  $i$  vagy sem. Mivel az eljárás végén egyetlen dobozban sem maradhat golyó, kapjuk, hogy  $S_i$  kezdeti értékeire fenn kell álljon, hogy minden  $i$ -re  $i|S_i$ . Másrészt nyilván teljesülnie kell, hogy egyetlen dobozban sem lehet több golyó, mint a doboz sorszáma, vagyis a fenti jelöléssel  $S_{i+1} - S_i \leq i$  minden  $i$ -re.

Vegyük észre, hogy ez a két feltétel már meghatározza az  $i$ -edik doboz kezdeti tartalmát. Ha ugyanis ezt a mennyiséget  $a_i$ -vel jelöljük, akkor

$$S_i = a_i + S_{i+1}.$$

Mivel  $S_{i+1}$  osztható  $(i+1)$ -gyel, másrészt  $0 \leq a_i < (i+1)$ , azért  $a_i$  éppen az a maradék, amit  $S_i$ -nek az  $(i+1)$ -gyel való osztásakor kapunk.  $i = 1$ -től indulva  $a_i$  értékei rendre meghatározhatók:

| $i$      | $S_i$    | $i+1$    | $a_i$    |
|----------|----------|----------|----------|
| 1        | 29       | 2        | 1        |
| 2        | 28       | 3        | 1        |
| 3        | 27       | 4        | 3        |
| 4        | 24       | 5        | 4        |
| 5        | 20       | 6        | 2        |
| 6        | 18       | 7        | 4        |
| 7        | 14       | 8        | 6        |
| 8        | 8        | 9        | 8        |
| 9        | 0        | 10       | 0        |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |

| Lépésszám \ Doboz száma | 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. | 7. | 8. |
|-------------------------|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 1                       | •  | 1  | 3  | 4  | 2  | 4  | 6  | 8  |
| 2                       | 1  | 2  | •  | 4  | 2  | 4  | 6  | 8  |
| 3                       | •  | 2  | 0  | 4  | 2  | 4  | 6  | 8  |
| 4                       | 1  | •  | 0  | 4  | 2  | 4  | 6  | 8  |
| 5                       | •  | 0  | 0  | 4  | 2  | 4  | 6  | 8  |
| 6                       | 1  | 1  | 1  | •  | 2  | 4  | 6  | 8  |
| 7                       | •  | 1  | 1  | 0  | 2  | 4  | 6  | 8  |
| 8                       | 1  | 2  | 2  | 1  | 3  | 5  | 7  | •  |
| 9                       | •  | 2  | 2  | 1  | 3  | 5  | 7  |    |
| 10                      | 1  | •  | 2  | 1  | 3  | 5  | 7  |    |
| 11                      | •  | 0  | 2  | 1  | 3  | 5  | 7  |    |
| 12                      | 1  | 1  | 3  | 2  | 4  | 6  | •  |    |
| 13                      | •  | 1  | 3  | 2  | 4  | 6  |    |    |
| 14                      | 1  | 2  | •  | 2  | 4  | 6  |    |    |
| 15                      | •  | 2  | 0  | 2  | 4  | 6  |    |    |
| 16                      | 1  | •  | 0  | 2  | 4  | 6  |    |    |
| 17                      | •  | 0  | 0  | 2  | 4  | 6  |    |    |
| 18                      | 1  | 1  | 1  | 3  | 5  | •  |    |    |
| 19                      | •  | 1  | 1  | 3  | 5  |    |    |    |
| 20                      | 1  | 2  | 2  | 4  | •  |    |    |    |
| 21                      | •  | 2  | 2  | 4  |    |    |    |    |
| 22                      | 1  | •  | 2  | 4  |    |    |    |    |
| 23                      | •  | 0  | 2  | 4  |    |    |    |    |
| 24                      | 1  | 1  | 3  | •  |    |    |    |    |
| 25                      | •  | 1  | 3  |    |    |    |    |    |
| 26                      | 1  | 2  | •  |    |    |    |    |    |
| 27                      | •  | 2  |    |    |    |    |    |    |
| 28                      | 1  | •  |    |    |    |    |    |    |
| 29                      | •  |    |    |    |    |    |    |    |

Az ily módon kapott elrendezésre teljesül a talált két feltétel:

- (a)  $i|S_i$  minden  $i$ -re;
- (b)  $0 \leq a_i \leq i$  minden  $i$ -re.

Megmutatjuk, hogy ha ez a két feltétel teljesül, akkor vagy minden doboz üres, vagy pedig van olyan doboz, amelyet kiürítve a két feltétel továbbra is igaz marad.

Ha nem minden doboz üres, akkor az utolsó nem üres doboz sorszámát  $k$ -val jelölve (a) szerint  $k|S_k$ . Ugyanakkor az utolsó nem üres dobozról lévén szó  $S_k = a_k$ , tehát  $0 < a_k \leq k$  miatt  $a_k = k_i$ , vagyis az utolsó nem üres doboz biztosan kiüríthető.

Ha most a legkisebb sorszámú kiüríthető dobozból vesszük ki a golyókat, akkor (b) továbbra is igaz marad, hiszen csak olyan dobozokban nő – mégpedig pontosan eggyel – a golyók száma, amelyek eddig nem voltak kiüríthetőek.

Mivel pedig  $S_i - s_i$  osztható  $i$ -vel, ezért a kiürítés után az (a) feltétel is igaz marad.

Az eljárás tehát csak akkor nem folytatható, ha valamennyi doboz üres, vagyis a leírt módszerrel általában is megkapjuk az  $S_1$  darab golyó (egyetlen) kiüríthető elrendezését.