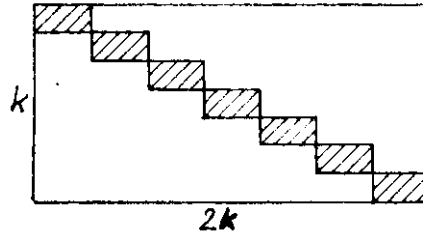


Nyilván feltehetjük, hogy $k \leq n$. Ha a bábukat a kívánt módon helyezzük el, akkor minden bástyához egyértelműen rendelhető hozzá az általa ütött bástya. Így bizonyos, hogy a kívánt módon csak páros számú bástyát lehet elhelyezni. Nevezzünk két egymást ütő bástyát „pár”-nak, a sakktábla sorait és oszlopait együttesen sávoknak. Egy pár 3 sávot foglal le, erre a 3 sávra további bástyát nem helyezhetünk.

A $k \times n$ -es sakktáblán $k + n$ sáv áll rendelkezésre, így legfeljebb $\left\lfloor \frac{k+n}{3} \right\rfloor$ pár – azaz $2 \cdot \left\lfloor \frac{k+n}{3} \right\rfloor$ bástya – helyezhető el a kívánt módon.

Ugyanakkor a párok száma nyilván nem lehet nagyobb sem a vízszintes, sem pedig a függőleges sávok számánál. Ez $k \leq n$ miatt a $2k$ felső becslést adja.

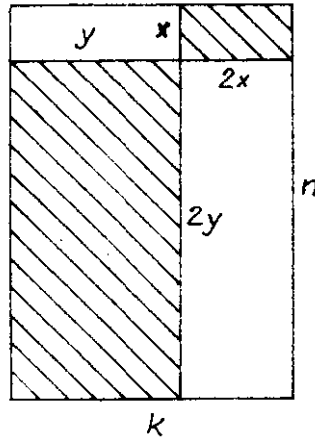
Ha $n > 2k$, akkor ez utóbbi becslés kisebb az előbbinél, másrészt ilyenkor $2k$ bástya el is helyezhető a kívánt módon (1. ábra).



1. ábra

Ha $n \leq 2k$, akkor $2 \cdot \left\lfloor \frac{k+n}{3} \right\rfloor \leq 2k$. Megmutatjuk, hogy $k \leq n \leq 2k$ esetén a $k \times n$ -es sakktáblán $\left\lfloor \frac{k+n}{3} \right\rfloor$ megfelelő pár helyezhető el.

Láttuk, hogy azok a sakktáblák, amelyeknek egyik oldala kétszer akkora, mint a másik, kitölthetők a hosszabb oldalukkal párhuzamos állású párokkal. Próbáljuk ilyen részekre osztani a sakktáblánkat: (2. ábra)



2. ábra

Az ábra jelölései szerint: $x + 2y = n$, $y + 2x = k$, ahonnan

$$x = \frac{2k - n}{3} \quad \text{és} \quad y = \frac{2n - k}{3}.$$

Ha ezek a számok egészek, akkor vízszintesen és függőlegesen összesen $x + y = \frac{k+n}{3}$ pár helyezhető el, ez pedig éppen $\left\lfloor \frac{k+n}{3} \right\rfloor$, hisz az egészrész jelen belül most egész szám áll.

Ha x vagy y nem egész, akkor a vízszintes téglalap oldalait $[x]$ -nek és $2[x]$ -nek választjuk. A függőleges téglalap oldalai most $k - 2[x]$ és $n - [x]$, ebben kell elhelyeznünk a hiányzó $u = \left\lfloor \frac{k+n}{3} \right\rfloor - [x]$ párt. Ez biztosan megtehető, ha a függőleges téglalap tartalmaz $u \times 2u$ oldalú résztéglalapot, azaz ha

$$k - 2[x] \geq u \quad \text{és} \quad n - [x] \geq 2u.$$

Az első egyenlőtlenség behelyettesítés és rendezés után a

$$\left\lfloor \frac{k+n}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2k-n}{3} \right\rfloor \leq k$$

alakot ölti. Ez pedig teljesül, hiszen az egészrész-jeleken belül levő számok összege k . A második egyenlőtlenségből, mivel n egész, és így $n + [x] = [n + x]$

$$2 \cdot \left\lfloor \frac{k+n}{3} \right\rfloor \leq n + \left\lfloor \frac{2k-n}{3} \right\rfloor = \left\lfloor 2 \cdot \frac{k+n}{3} \right\rfloor$$

adódik. A $2[t] \leq [2t]$ egyenlőtlenség viszont minden számra teljesül.

Összefoglalva tehát: ha $n > 2k$, akkor a $k \times n$ -es sakktáblán legfeljebb $2k$, ha pedig $k \leq n \leq 2k$, akkor $2 \cdot \left\lfloor \frac{k+n}{3} \right\rfloor$ darab bástya állítható föl a kívánt módon.

Megjegyzés. Sokan igazolták, hogy $2k$, ill. $2 \cdot \left\lfloor \frac{k+n}{3} \right\rfloor$ felső korlátok – ez lényegében a 2064. gyakorlat megoldásából is kiderül –, azt azonban már nem vizsgálták, hogy ezek a korlátok elérhetőek-e.