

A számok abszolút értékének összege 1, így nem lehet valamennyi szám 0. A számok összege viszont 0, így van közöttük negatív és pozitív is. Legyenek az n darab szám közül a negatívak

$$(1) \quad a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_k < 0,$$

a nem-negatívak

$$(2) \quad 0 \leq a_{k+1} \leq \dots \leq a_{n-1} \leq a_n.$$

Ekkor $1 \leq k < n$, valamint

$$a_1 + a_2 + \dots + a_k = -\frac{1}{2}, \quad a_{k+1} + \dots + a_{n-1} + a_n = \frac{1}{2},$$

hiszen csak így lehet a számok összege 0, abszolút értékeik összege pedig 1.

A k darab negatív $a_1, a_2, \dots, a_k$ szám összege $-1/2$, tehát közülük a legkisebb nem lehet nagyobb $-\frac{1}{2k}$ -nál. Hasonlóan, a nem-negatív $a_{k+1}, \dots, a_n$ számok közül a legnagyobb, a_n , értéke legalább $\frac{1}{2(n-k)}$. Így

$$a_n - a_1 \geq \frac{1}{2(n-k)} + \frac{1}{2k} = \frac{2n}{n^2 - (n-2k)^2} \geq \frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n},$$

és ezt kellett bizonyítanunk.

Megjegyzések 1. A legnagyobb és a legkisebb szám különbsége pontosan akkor $\frac{2}{n}$, amikor $n = 2k$ és $a_n = \frac{0,5}{n-k}$, $a_1 = \frac{-0,5}{k}$ (vagyis az (1), (2) egyenlőtlenségeinkben mindenütt egyenlőség áll fenn).

Ha n páratlan, akkor a kérdéses különbség legalább $\frac{2n}{n^2-1}$. Ezt néhányan észre is vették.

2. Többen nem vették figyelembe, hogy az adott számok között nulla is lehet – ezeket minősítettük kissé hiányosnak.

Néhányan konkrét n értékekre mutatták meg a feladat feltételének teljesülését, és ebből „következtettek” a többi n -re (hogy, úgymond, a továbbiakban „látszik” az állítás igaz volta). Ezek a dolgozatok hibásnak minősültek.