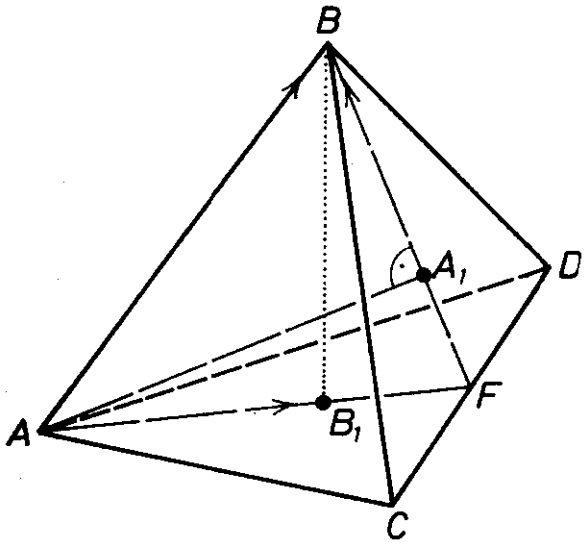
Először lássuk be, hogy az állítás igaz arra az esetre, amikor $\overrightarrow{PQ}$ a tetraéder valamelyik éle. Legyen pl. $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AB}$. Ekkor $\overrightarrow{AB}$ vetülete az $ABC$, ill az $ABD$ tetraéderlapokon önmaga, az $ACD$ lapon $\overrightarrow{AB_1}$, a $BCD$ lapon $\overrightarrow{A_1B}$, ahol $A_1$, és $B_1$ a $BCD$, ill. az $ACD$ szabályos háromszög súlypontja.




Jelölje $F$ a $CD$ él felezőpontját, ekkor $\overrightarrow{AB_1} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AF}$ és $\overrightarrow{A_1B} = \frac{2}{3}\overrightarrow{FB}$, ezért

$$\overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{A_1B} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FB}) = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB},$$

tehát ebben az esetben a vetületek összege valóban $\frac{8}{3}\overrightarrow{AB}$.

Az állítás akkor is igaz, ha $\overrightarrow{PQ}$ párhuzamos a tetraéder valamelyik élével, mert akkor pl. $\overrightarrow{PQ} = a \cdot \overrightarrow{AB}$, ahol $a$ valamilyen valós szám. Mivel a vektor $a$-szorosra változott, $a$-szorosra változnak a vetületek, s így azok összege is.

Ha pedig $\overrightarrow{PQ}$ nem párhuzamos a tetraéder egyik élével sem, akkor felbontható három, a tetraéder 1–1 oldalélével párhuzamos vektor összegére (hiszen ezek nem egy síkba eső vektorok). E komponensekre már tudjuk, hogy igaz az állítás, és mivel vektorok összegének egy síkra való vetülete egyenlő az egyes vektorok vetületének összegével, ebből következik, hogy az állítás e komponensek összegére is igaz.

Ezzel a bizonyítást befejeztük.

*Limbek Csaba* (Bp., Fazekas M. Gyak. Gimn., II. o. t.)
dolgozata alapján