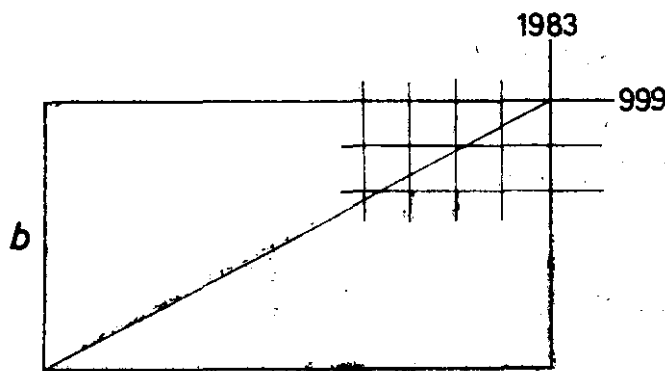


Minden olyan mező, amelyen az átló keresztülhalad, egy szakaszt metsz ki az átlóból. Egy ilyen szakasz két végpontja az átló és a mező kerületének két metszéspontja. Azt kell tehát megszámolnunk, hogy a mezők határolóegyeneseivel alkotott metszéspontok hány szakaszra osztják fel az átlót.

A függőleges egyenesek száma 1984, ez 1984 metszéspontot jelent. Az 1000 darab vízszintes egyenes 1000 pontban metszi az átlót, ezek között azonban lesznek olyan metszéspontok is – például a legelső vagy az utolsó –, amelyeken függőleges egyenesek is áthaladnak. Az ilyen pontokat – tehát azokat a csúcspontokat, amelyeken az átló keresztülhalad – kétszer számoltuk.

Ha az átló egy csúcsponton halad keresztül, akkor a létrejövő téglalap hasonló az eredetihez, és ha a mező oldala egységnyi, akkor oldalai szintén egészek.



Oldalaira fennáll, hogy

$$(1) \quad \frac{a}{b} = \frac{1983}{999} \quad \text{és} \quad 1 \leq a \leq 1983.$$

Megfordítva, minden olyan a, b egész számokból álló számpárhoz, melyre (1) teljesül, tartozik egy, az ábrán látható téglalap, vagyis egy csúcs, amelyen a sakktábla átlója áthalad.

Mivel 1983 és 999 legnagyobb közös osztója 3, azért (1) alapján $\frac{a}{b} = \frac{661}{333}$, és ez az alak tovább már nem egyszerűsíthető. Ez azt jelenti, hogy a egész számú többszöröse 661-nek, b pedig 333-nak. Másrészt $a \leq 1983$, ezért (1)-nek pontosan 3 megoldása van, mégpedig

$$a = 661, b = 333; \quad a = 1322, b = 666 \quad a = 1983, b = 999.$$

Összesen tehát négy csúcsponton halad keresztül az átló, ezek közül kettő a sakktáblának is csúcsa, a másik kettő pedig az átló harmadolópontjai.

A mezők határolóegyenesei tehát $1984 + 1000 - 4 = 2980$ pontban metszik az átló egyenesét. A létrejövő szakaszok száma ennél 1-gyel kevesebb, vagyis a sakktábla átlója 2979 mezőn halad keresztül.

Megjegyzések. 1. A megoldás során azt is megmutattuk, hogy ha a sakktábla oldalai relatív prímek, akkor a sakktábla átlója egyetlen mező csúcsán sem halad át a tábla belsejében.

2. A bizonyításból következik, hogy egy $k \times n$ oldalú sakktábla átlója $(k + n + 1) - d$ mezőn halad keresztül, ahol d a k és n számok legnagyobb közös osztója.