

I. megoldás. Legyen az öt szám nagyság szerint növekvő sorrendben x_1, x_2, x_3, x_4 és x_5 . A tíz összeg legkisebbike $x_1 + x_2$, ez tehát kisebb 15-nél, a legnagyobb pedig $x_4 + x_5$, ami nagyobb 23-nál. A második legkisebb összeg $x_1 + x_3$, a második legnagyobb pedig $x_3 + x_5$. A feltétel szerint így

$$(1) \quad x_1 + x_3 = 15 \quad \text{és} \quad x_3 + x_5 = 23.$$

A két egyenletet összeadva $x_1 + x_5 + 2x_3 = 38$ adódik, vagyis $x_1 + x_5$ páros szám. A tíz összeg közül ez nem a legkisebb és nem is a legnagyobb, így háromféle értéke lehet: 16, 18 és 20.

Mindhárom esetben (1) -gyel együtt egy-egy háromismeretlenes egyenlet rendszert kapunk x_1, x_3 és x_5 ismeretlenekkel. Egy szerencsés észrevétellel azonban elkerülhetjük annak vizsgálatát, hogy az egyes esetekben az egyenlet-rendszerek megoldásai kiterjeszthetők-e a feladat megoldásává.

A tíz összeg legnagyobbikat ($x_4 + x_5$) és legkisebbikét ($x_1 + x_2$) elhagyva a megmaradt nyolc összeg összege

$$(2) \quad 3(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) + x_3 = 149,$$

vagyis x_3 2 maradékot ad 3-mal osztva. Az $x_1 + x_5 + 2x_3 = 38$ feltétel szerint $x_1 + x_5$ 1 maradékot ad 3-mal osztva, vagyis $x_1 + x_5 = 16$.

Mivel x_3 legalább 2-vel kisebb, mint x_5 , ezért $x_1 + x_3$ legfeljebb 14 lehet, ami ellentmond (1)-nek.

A feladatnak tehát nincsen egész megoldása.

Ratkó Júlia (Budapest, Berzsenyi D. Gimn., L. o. t.) és

Kós Géza (Budapest, Berzsenyi D. Gimn., I. o. t.)

dolgozatai nyomán

II. megoldás. Rendezzük ismét nagyság szerint az öt ismeretlen számot. Ekkor teljesülnek az alábbi egyenlőtlenségek:

$$(3) \quad x_1 + x_2 < x_1 + x_3 < x_1 + x_4 < x_1 + x_5 < x_2 + x_5 < x_3 + x_5 < x_4 + x_5,$$

$$(4) \quad x_1 + x_2 < x_1 + x_3 < x_2 + x_3 < x_2 + x_4 < x_3 + x_4 < x_3 + x_5 < x_4 + x_5.$$

Látható, hogy $x_1 + x_2$ a legkisebb, $x_1 + x_3$ az utána következő; $x_4 + x_5$ a legnagyobb, és $x_3 + x_5$ az előtte levő. A többi 6 összeg értéke tehát valamilyen sorrendben 16, 17, 18, 19, 20 és 21. E hat összeg összege:

$$(5) \quad 2(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) + x_2 + x_4 = 111,$$

vagyis $x_2 + x_4$ páratlan szám: értéke 17, 19 vagy 21.

Másfelől $x_2 + x_4$ biztosan kisebb, mint $x_3 + x_4$ és $x_2 + x_5$, viszont biztosan nagyobb, mint $x_1 + x_4$ és $x_2 + x_3$. A három szóba jövő páratlan szám közül csak a 19-nél van legalább két kisebb és legalább két nagyobb a hat szám között, tehát $x_2 + x_4 = 19$. A megadott összegek közül pontosan kettő nagyobb nála, a 20 és a 21. Ezek tehát valamilyen sorrendben az $x_3 + x_4$ és az $x_2 + x_5$. E két összeg összege így

$$x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 41.$$

Mivel $x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = (x_2 + x_4) + (x_3 + x_5)$ és $x_2 + x_4 = 19$, kapjuk, hogy $x_3 + x_5 = 22$. Ez pedig lehetetlen, hiszen a 22 nem szerepel a megadott összegek között.

Azt kaptuk tehát, hogy nincs olyan öt különböző pozitív egész szám, amelyekre teljesülnének a feltételek.

Megjegyzés. A megoldásokban nem használtuk ki, hogy az öt szám pozitív, a feltételek tehát az egész számok körében sem teljesülhetnek.

A számoknak mindenképpen különbözőknek kell lenniük, mert ha öt szám között vannak egyenlők, akkor a belőlük képezhető tíz két tagú összeg között legfeljebb hét különböző lehet.

Elképzelhető, hogy a valós számok körében már van megoldása a feladatnak, vizsgáljuk most meg ezt a lehetőséget. A második megoldás gondolatmenete szerint elindulva most $x_2 + x_4$ páros is lehet. Mivel a vizsgált hat „középső” összeg között van legalább két nála kisebb és legalább két nála nagyobb. Ilyenkor $x_2 + x_4 = 18$.

A 18-nál kisebb két szóba jövő összeg a 16 és 17, ezek tehát valamelyik sorrendben az $x_1 + x_4$ és az $x_2 + x_3$. így most

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 33.$$

(5) alapján $111 = 2(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) + 2x_5 + (x_2 + x_4)$, ahonnan $x_5 = 13,5$. Mivel $x_3 + x_5 = 23$ és $x_1 + x_3 = 15$, kapjuk, hogy $x_3 = 9,5$ és $x_1 = 5,5$.

A tíz érték közül eddig megkaptuk a 15, a 18, a 19 és a 23-at. A hiányzó hat összeg $x_2 + x_1$, $x_2 + x_3$, $x_2 + x_5$, $x_4 + x_1$, $x_4 + x_3$ és $x_4 + x_5$. E hat összeg közül kettő értéke nem szerepel a nyolc szám között ($x_1 + x_2$ és $x_4 + x_5$), a megmaradt négy pedig a 16, 17, illetve a 20 és 21 értékeket állítja elő valamilyen sorrendben.

Mivel $x_2 + x_5$ és $x_2 + x_3$ különbsége 4, és ugyanennyi $x_4 + x_3$, valamint $x_4 + x_1$ különbsége is ($x_5 - x_3 = x_3 - x_1 = 4$), ezért attól függően, hogy milyenek választjuk $x_2 + x_5$ és $x_3 + x_4$ nagyságviszonyát, vagy $x_2 + x_5 = 20$ és $x_3 + x_4 = 21$, vagy pedig $x_2 + x_5 = 21$ és $x_3 + x_4 = 20$. Az első esetben $x_2 = 6, 5$, $x_4 = 11, 5$, a másodikban pedig $x_2 = 7, 5$, $x_4 = 10, 5$. Látható, hogy mind a két esetben megoldást kapunk.

A valós számok körében tehát két megoldása van a feladatnak. Ezek

$$x_1 = 5, 5; \quad x_2 = 6, 5; \quad x_3 = 9, 5; \quad x_4 = 11, 5; \quad x_5 = 13, 5,$$

illetve

$$x_1 = 5, 5; \quad x_2 = 7, 5; \quad x_3 = 9, 5; \quad x_4 = 10, 5; \quad x_5 = 13, 5.$$