

I. megoldás. Ha $a < 0$, akkor egyik egyenletrendszerünknek sincs megoldása, a két megoldáshalmaz tehát azonos – az üres halmaz – ilyenkor tehát I. és II. ekvivalensek.

A továbbiakban legyen $a \geq 0$. II. második egyenlete azt mondja ki, hogy $x + y$ egész szám. A két egyenletrendszer tehát az a -nak olyan értékeire ekvivalens, amikor ez az egész szám a 0. Így a -nak azokat az értékeit kell kizárnunk, melyekre az $x^2 + y^2 = a$ feltétel mellett $x + y$ fölvehet 0-tól különböző egész értéket is.

Vezessük be az $x + y = m$ jelölést (m egész), és vizsgáljuk meg, hogyan függenek II. megoldásai a -tól és m -tól. Az $x = m - y$ összefüggést az első egyenletbe helyettesítve, rendezés után

$$(2) \quad 2y^2 - 2my + m^2 - a = 0$$

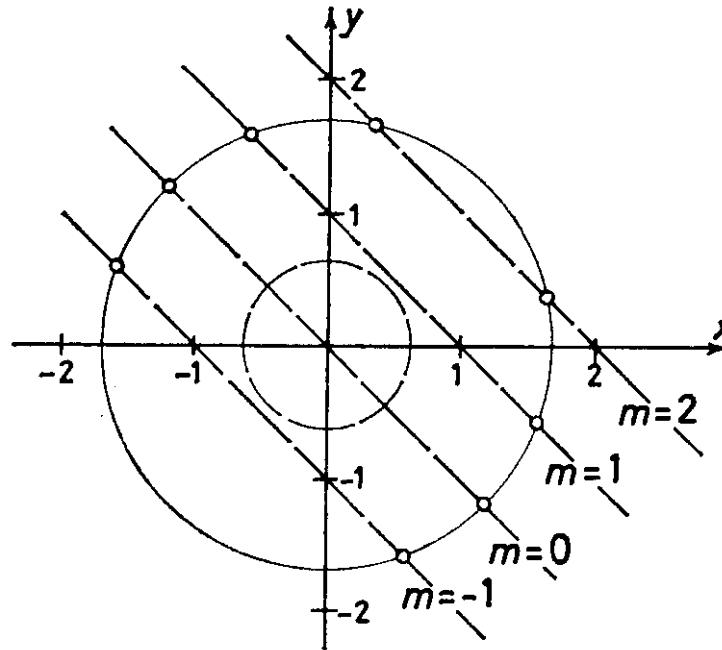
adódik.

Az I. és II. egyenletrendszer pontosan akkor ekvivalens, ha (2) semmilyen y -ra nem teljesül, ha m 0-tól különböző egész szám, vagyis ha (2) diszkriminánsa, $4(2a - m^2)$, negatív m -nek ilyen értékeire.

Ha $m \neq 0$ és egész, akkor m^2 legalább 1. A diszkrimináns tehát pontosan akkor lesz minden, 0-tól különböző m egész számra negatív, ha $2a < 1$, azaz $a < \frac{1}{2}$.

Dringó László (Budapest XI., Petőfi S. Ált. Isk., 8. o. t.)

II. megoldás. Ismét feltesszük, hogy $a \geq 0$ és ábrázoljuk a derékszögű koordináta-rendszerben az egyes egyenletrendszerek megoldásait. Azok a pontok, melyeknek koordinátáira $x^2 + y^2 = a$ teljesül, egy origó középpontú, $\sqrt{a}$ sugarú körvonalon helyezkednek el. Az $x + y = m$ feltételnek eleget tevő pontok pedig egymással párhuzamos egyeneseken.



Mivel $a \geq 0$, a két egyenletrendszer a -nak azokra az értékeire ekvivalens, amelyekre a $\sqrt{a}$ sugarú, origó középpontú körnek csak az $m = 0$ értékhez tartozó egyenessel van közös pontja, vagyis a kör az $m = 1$, illetve az $m = -1$ értékekhez tartozó $x + y = 1$, illetve $x + y = -1$ egyenletű egyenesek által határolt tartomány *belsejében* helyezkedik el.

Az origó épp felezi e két egyenes távolságát, ami $\sqrt{2}$, így a kapott feltétel pontosan akkor teljesül, ha a kör sugara kisebb, mint $\sqrt{2}/2$, vagyis $a < 1/2$.