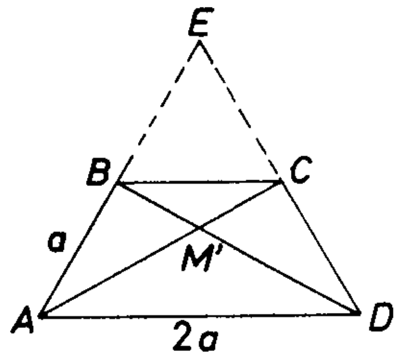
Jelöljük a trapéz $AB$ oldalának hosszát $a$-val. A két alap nem lehet egyenlő hosszú, mert ekkor a szárak is egyenlő hosszúak volnának, noha a négy oldalból pontosan 3 egyenlő hosszúságú. Ezért a trapéz alapjai csak $CB$ és $AD$ lehetnek, az $AB$ és $CD$ szárak pedig egyenlő hosszúak. Egészítsük ki a trapézt háromszöggé, s jelöljük $E$-vel a szárak metszéspontját (1. ábra).




*1. ábra*

Mivel $CB \| AD$ és $CB = \dfrac{1}{2} AD$, azért az $AED$ háromszög szabályos és oldalának hossza $2a$.

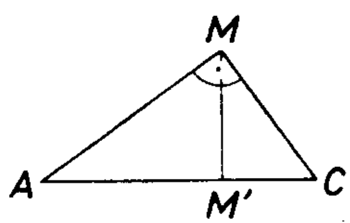
A $BEC$ szabályos háromszög oldala fele az $ADE$ háromszög oldalának, tehát területe negyede annak. A trapéz területe így

(1)
$$T_{ABCD} = \frac{3}{4} T_{ADE} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Jelöljük a trapéz átlóinak metszéspontját $M'$-vel. A $B$ pont felezi az $AE$ szakaszt, hasonlóan $C$ felezi $DE$-t. Így $M'$ az $ADE$ szabályos háromszög középpontja, tehát

(2)
$$AM' = \frac{2}{3} AC = \frac{2a}{\sqrt{3}},$$
$$CM' = \frac{1}{3} AC = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

A gúla négyélű csúcsát jelölje $M$. A feladat szerint $M$ merőleges vetülete az $ABCD$ lapra éppen $M'$, tehát $MM'$ az $AMC$ háromszög magassága (2. ábra).




*2. ábra*

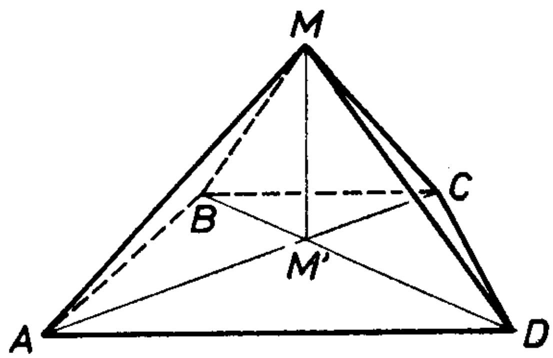
Ugyancsak a feltételek szerint $AMC\sphericalangle = 90°$, a derékszögű háromszögekre vonatkozó tételek és (2) alapján

(3)
$$MM' = \sqrt{AM' \cdot M'C} = a\sqrt{\frac{2}{3}},$$
$$AM = \sqrt{AM' \cdot AC} = a\sqrt{2}$$
$$CM = \sqrt{CM' \cdot CA} = a.$$

A gúla $V$ térfogatát most már ki tudjuk számítani :

$$V = \frac{T_{ABCD} \cdot MM'}{3} = \frac{a^3\sqrt{2}}{4}.$$

A gúla felszínét a határoló lapok területének összege adja, melyek közül az alaplap területét már ismerjük.




*3. ábra*

Az $MM'B$ és az $MM'C$, valamint az $MM'A$ és az $MM'D$ háromszögek egybevágók (3. ábra), s így $MB = MC$, $MA = MD$. A $BCM$ háromszög mindhárom oldala éppen $a$, így területe

$$T_{BCM} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Az $AMD$ háromszög egyenlő szárú, s mivel $MA^2 + MD^2 = 4a^2 = AD^2$, Pitagorasz tételének megfordításából következik, hogy derékszögű is. Így

$$T_{AMD} = \frac{a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{2}}{2} = a^2.$$

Végül az $MAB$ és $MCD$ háromszögek egybevágók és $MA = MD = a\sqrt{2}$, $AB = CD = a$ és $MB = MC = a$ miatt szintén egyenlő szárú derékszögű háromszögek, és területük összege $a^2$. A gúla felszíne tehát

$$F = 3\frac{a^2\sqrt{3}}{4} + a^2 + \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + a^2 = a^2\sqrt{3} + 2a^2 = a^2(\sqrt{3} + 2).$$

*Dingó László* (Budapest XI., Petőfi S. Ált. Isk. 8. o. t.)
dolgozata alapján