

$$(1) \quad \left[\sqrt{[x]} \right] = \left[\sqrt{\sqrt{x}} \right]$$

Megoldás. Vizsgáljuk meg, hogy egy adott n egész szám mikor lesz benne a bal, illetve a jobb oldalon álló függvény értékkészletében.

Az egész rész értelmezése alapján $[\sqrt{x}] = n$ pontosan akkor teljesül, ha $n \leq \sqrt{[x]} < n+1$. Négyzetre emelés után az egyenlőtlenségek iránya nem változik, hiszen a szereplő mennyiségek nem negatívak.

$$n^2 \leq [x] < (n+1)^2.$$

Mivel az $[x]$ -re kapott korlátok egészek, a kapott egyenlőtlenségek x -re is teljesülnek. Azt kaptuk tehát, hogy $[\sqrt{[x]}] = n$ pontosan akkor teljesül, ha

$$(2) \quad n^2 \leq x < (n+1)^2.$$

Hasonlóan kapjuk, hogy $\left[\sqrt{\sqrt{x}} \right] = n$ pontosan akkor teljesül, ha

$$(3) \quad n^4 \leq x < (n+1)^4.$$

Ha tehát x megoldása (1)-nek, akkor a közös helyettesítési értéket n -nel jelölve teljesülnie kell (2)-nek és (3)-nak, de ekkor n -re fenn kell álljon, hogy

$$n^4 < (n+1)^2.$$

Négyzetgyököt vonva (mindkét oldal nemnegatív) $n^2 < n+1$ adódik, ez pedig csak $n=0$ vagy $n=1$ esetében teljesül, hiszen n egész. Ezt (2)-vel egybevetve $0 \leq x < 1$, illetve $1 \leq x < 4$, (3)-ból $0 \leq x < 1$, illetve $1 \leq x < 16$ adódik. Ha tehát $0 \leq x < 1$, akkor (1)-ben mindkét oldal értéke 0, ha pedig $1 \leq x < 4$, akkor (1)-ben mindkét oldal értéke 1.

Az egyenletnek tehát azok az x számok a megoldásai, melyekre $0 \leq x < 4$.

Megjegyzés. A megoldásból az is kiderül, hogy ha $x > 4$, akkor

$$\left[\sqrt{[x]} \right] > \left[\sqrt{\sqrt{x}} \right].$$