

Az M halmazban legfeljebb három szám adhat ugyanolyan maradékot, m -mel osztva. Ugyanis m mindkét adott esetben prímszám, így m -nél kevesebb, m -mel osztva ugyanazt a maradékot adó szám összege nem osztható m -mel.

Ha $m = 5$, akkor a szóba jövő maradékok száma négy, tehát M legfeljebb $4 \cdot 3 = 12$ számból állhat. Megmutatjuk, hogy az $M = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14\}$ tizenkét elemű halmazra teljesülnek a feltételek, ami azt jelenti, hogy az a) esetben a keresett szám 12.

Legyenek a, b, c és d az M halmaz elemei. Mivel M -ben minden nem 0 maradék pontosan háromszor fordul elő, e négy szám között van kettő – mondjuk b és c –, amelyek különböző maradékot adnak, 5-tel osztva. Tekintsük az alábbi öt számot:

$$a; \quad a + b; \quad a + c; \quad a + b + c; \quad a + b + c + d.$$

Ha van köztük 5-tel osztható, akkor készen vagyunk. Ha nincs, akkor viszont van köztük kettő olyan, amelyek ugyanazt a maradékot adják, 5-tel osztva. E kettő nem lehet az $a + b$ és az $a + c$, mert feltevésünk szerint b és c különböző maradékot adnak, 5-tel osztva. Így viszont az 5-tel osztható különbség a, b, c és d közül kettőnek vagy háromnak az összege.

Ha $m = 7$, akkor a lehetséges nem 0 maradékok száma 6, így a fenti gondolatmenet szerint azt kapjuk, hogy M -nek legfeljebb $6 \cdot 3 = 18$ eleme lehet. Ez azonban most nem érhető el, a keresett érték 8. Először egy megfelelő 8 elemű halmazt adunk meg, ez $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 13\}$. Állítjuk, hogy erre teljesülnek a feltételek. Csoportosítsuk ugyanis párosával M elemeit: $(1, 6)$, $(2, 5)$, $(3, 4)$, $(8, 13)$. Ha a négy kiválasztott M -beli szám között egy pár mindkét tagja szerepel, akkor készen vagyunk. Azt az esetet kell még megvizsgálnunk, amikor a kiválasztott négy szám mindegyike más párból való. Az alábbi táblázat mutatja, hogy ekkor is mindig találunk 7-tel osztható összeget:

(1, 6)	(8, 13)	(2, 5)	(3, 4)	7-tel osztható összeg
1	13	bármelyik	bármelyik	$1 + 13$
1	8	5	bármelyik	$1 + 8 + 5$
1	8	2	3	$1 + 8 + 2 + 3$
1	8	2	4	$1 + 2 + 4$
6	8	bármelyik	bármelyik	$6 + 8$
6	13	2	bármelyik	$6 + 13 + 2$
6	13	5	4	$6 + 13 + 5 + 4$
6	13	5	3	$6 + 5 + 3$

Másodszor azt állítjuk, hogy az M -nek nem lehet nyolcnál több eleme. Ha ugyanis az M halmaznak legalább kilenc eleme van, akkor mivel legfeljebb hatféle maradék fordulhat elő, s mindegyik legfeljebb háromszor, az M elemei között van olyan a_1 és a_2 , amelyek ugyanazt az a , és van olyan b , és b_2 , amelyek ugyanazt az a -tól különböző b maradékot adják 7-tel osztva ($1 \leq a, b \leq 6$).

Az (a_1, a_2, b_1, b_2) számnégyesre csak úgy teljesülhet a feltétel, ha az $a + b$, $2a + b$, $2b + a$ összegek valamelyike, vagyis a szorzatuk osztható 7-tel. Mivel e három szám szorzata

$$(a + b)(2a + b)(2b + a) = 2(a^3 + b^3) + 7(a^2b + b^2a),$$

ezért $a^3 + b^3$ osztható 7-tel. Egy 7-tel nem osztható szám köbe 1 vagy 6 maradékot ad 7-tel osztva, így innen azt kapjuk, hogy a^3 és b^3 közül az egyik 1, a másik pedig 6 maradékot ad, 7-tel osztva.

Ha az M halmaznak legalább kilenc eleme van, akkor mindenképpen van olyan c_1 és c_2 , amelyek 7-tel osztva ugyanazt az a -tól és b -tól különböző c maradékot adják. Ha ugyanis az a és b maradékok egyike sem szerepel kettőnél többször, akkor a többi öt szám legfeljebb négy különböző maradékot adhat. Ha pedig, mondjuk, az a háromszor is szerepel, akkor a további hat szám közül az egyiket d -vel jelölve az $a + d$, $2a + d$, $3a + d$ valamelyike szükségképpen osztható 7-tel, vagyis a hat szám legfeljebb háromféle maradékot adhat, s így van két a -tól különböző maradék is, ami legalább kétszer fordul elő.

Ha viszont az a, b és c maradékok mindegyike legalább kétszer szerepel, akkor $a^3 + b^3$ mellett $a^3 + c^3$ és $b^3 + c^3$ is osztható 7-tel. Ez viszont már nem lehet, hiszen ekkor a^3, b^3 és c^3 közül bármely kettőre fenn kellene állnia annak, hogy egyikük 1, másikuk pedig 6 maradékot ad 7-tel osztva. M -nek ezért nem lehet nyolcnál több eleme.

Tehát a feladat feltételeit teljesítő maximális elemszámú M halmaznak az a) esetben 12, a b) esetben pedig 8 eleme van.