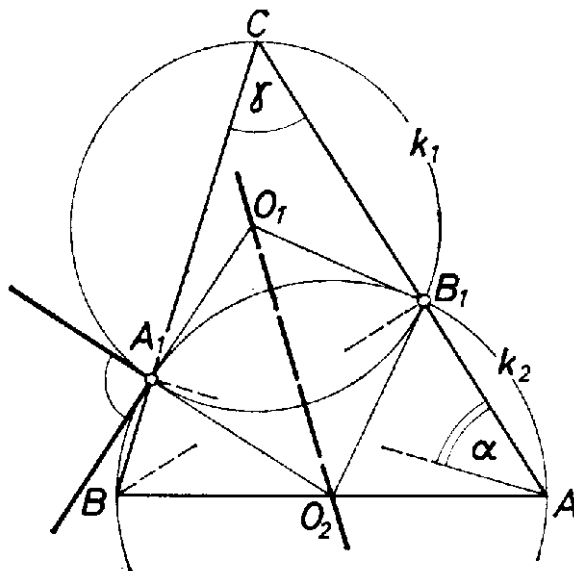


I. megoldás. Az hogy két kör merőlegesen metszi egymást, azt jelenti, hogy a metszéspontjaikban húzott érintőik merőlegesek egymásra, vagy ami ezzel egyenértékű, hogy a közös pontjukban húzott sugaraik merőlegesek egymásra. Ezt fogjuk bizonyítani.

Az $AA_1 \perp BC$ és $BB_1 \perp AC$, azaz A_1, B_1 pontok rajta vannak az AB szakasz Thalész körén, k_2 -n. Továbbá azt is tudjuk, hogy A_1, B_1 a k_1 körnek is pontja. Jelöljük k_1 középpontját O_1 -gyel, k_2 -ét O_2 -vel. Nyilvánvaló, hogy $O_1A_1O_2 \sphericalangle = O_1B_1O_2 \sphericalangle$, hiszen ezek egymás tükörképei az O_1O_2 centrálisra. Legyen $BCA \sphericalangle = \gamma$ és $A_1AC \sphericalangle = \alpha$. Mivel a háromszög hegyesszögű, $\alpha < BAC \sphericalangle < 90^\circ$, és $\gamma < 90^\circ$ miatt mindkettő ugyanannak a derékszögű háromszögnek a szöge és $\alpha + \gamma = 90^\circ$. A k_1 körben az $A_1O_1B_1 \sphericalangle = 2A_1CB_1 \sphericalangle = 2\gamma$, ugyanazon ívhez tartozó kerületi és középponti szögek. A k_2 körben hasonlóan $A_1O_2B_1 \sphericalangle = 2A_1AB_1 \sphericalangle = 2\alpha$, hiszen A_1, B_1 az AB átmérő ugyanazon oldalára esnek.



1. ábra

Ezekből következik, hogy az $A_1O_1B_1O_2$ deltoidban

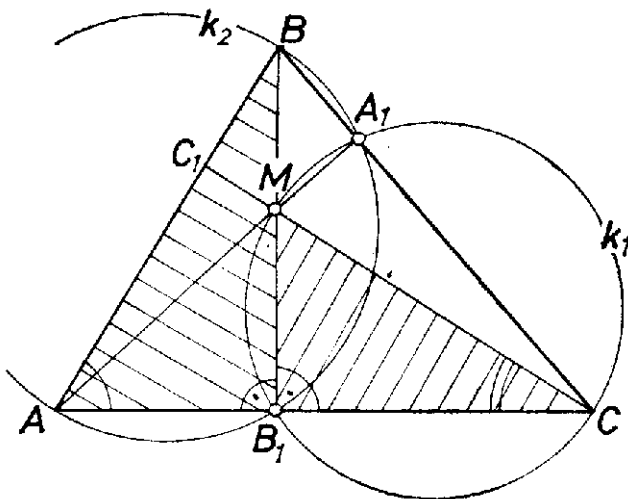
$$O_1A_1O_2 \sphericalangle + O_2B_1O_1 \sphericalangle = 360^\circ - (2\alpha + 2\gamma) = 180^\circ,$$

tehát mindegyikre külön-külön 90° jut, amint azt bizonyítani akartuk.

II. megoldás. Húzzuk meg az ABC háromszög harmadik magasságvonalát is, talppontját jelöljük C_1 -gyel. A CA_1B_1 pontokon átmenő k_1 kör átmegy a háromszög M magasságpontján is, megegyezik a CM szakasz Thalész körével. A

$$B_1AB \triangle \sim C_1AC \triangle$$

mindkettő derékszögű és az A csúcsnál levő szögük közös. Mivel a háromszög hegyesszögű, M belső pont.



2. ábra

Bene László (Győr, Czuczor G. Bencés Gimn., II. o. t.)

Megjegyzés: A III. megoldásban nem használtuk fel, hogy az ABC háromszög hegyesszögű. A megoldás során az ABC háromszög köré írt k kört az M centruból felére kicsinyítettük. Láttuk, hogy az új körön rajta vannak az eredeti háromszög oldalfelező pontjai, magasságvonalának a talppontjai, és a magasságpontot a csúcsokkal összekötő szakaszok felezőpontjai. Ez az ún. Feuerbach-kör, amelyet a k -ból általában az ABC háromszög S centrumára vonatkozó hasonlósággal szokás előállítani.