Jelöljük p_n-nel az n-edik prímszámot, és legyen $q_n = 2n-1$ az n-edik páratlan szám. Rögzített $n \geq 2$ mellett legyen k tetszőleges pozitív egész, melyre

$$q_1 + q_2 + \ldots + q_k < S_n \tag{2}$$

teljesül. Mivel $q_1 = p_1 - 1$, ebből

$$q_2 + \ldots + q_k \leq p_2 + \ldots + p_n$$

következik.

Itt mindkét oldalon 1-nél nagyobb különböző páratlan számok összege áll. Mivel a bal oldali számok szomszédosak, köztük a legnagyobb nem lehet nagyobb a jobb oldalon álló számok legnagyobbikánál:

$$q_k \leq p_n$$

amiből következik, hogy

$$q_{k+1} \leq p_{n+1}.$$

Adjuk ezt az egyenlőtlenséget (2)-höz, kapjuk, hogy

$$q_1 + q_2 + \ldots + q_k + q_{k+1} < S_{n+1}. \tag{3}$$

Mivel az első $k+1$ páratlan szám összege $(k+1)^2$-nel egyenlő, (3)-ból következik, hogy $S_n \leq m^2 \leq S_{n+1}$ biztosan teljesül az $m = k+1$ számra, ha k-t a legnagyobb olyan számnak választjuk, amelyre még te]jesül (2). Mivel $n = 1$ mellett $m = 2$ eleget tesz $S_n \leq m^2 \leq S_{n+1}$ -nek, a feladat állítását ezzel beláttuk.

Danyi Pál (Pécs, Nagy Lajos Gimn., III. o. t.)