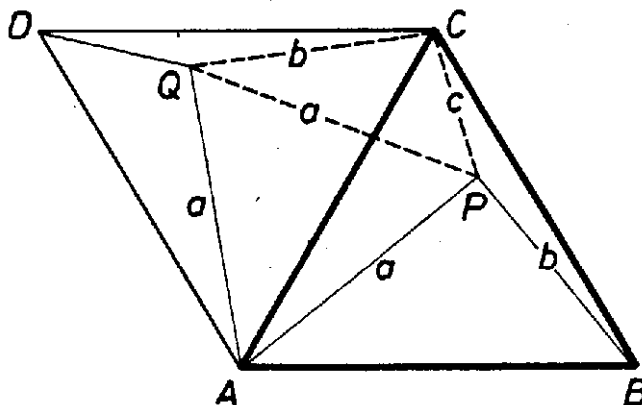


Legyen ABC a keresett háromszög, és jelöljük P -nek az egyes csúcsoktól mért távolságát a megfelelő kisbetűvel. Az ABC háromszög a P körül szabadon forgatható, és tetszőleges, a P -n átmenő tengelyre tükrözhető, hiszen ezek a transzformációk az ABC háromszög szabályosságát és a csúcsok P -től mért távolságait változatlanul hagyják. Válasszuk az ABC háromszög körüljárását pozitívnak és forgassuk el 60° -kal a háromszöget és benne a P pontot A körül. Ez a forgatás B -t C -be viszi, C és P új helyzetét jelöljük D -vel, illetve Q -val. A forgatás miatt $CQ = BP$, és az APQ háromszög szabályos. Tehát a CPQ háromszög oldalai rendre egyenlők az adott szakaszokkal:



$CP = c$, $CQ = b$, $PQ = a$. Mivel olyan háromszöget keresünk, amelyben P belső pont, az a , b , c oldalakkal megszerkesztett háromszög csak akkor ad megoldást, ha a szögei kisebbek 120° -nál, hiszen a PCQ szög benne van a 120° -os BCD szögben, a QPC , PQC szögeket pedig úgy kapjuk a 180° -nál kisebb APC , AQC szögekből, hogy elvesszük belőle a 60° -os APQ , AQP szögeket.

A szerkesztés menete tehát a következő. Szabadon megválaszthatjuk a P -től c távolságra levő C pontot és a PC szakasz valamelyik oldalán megszerkesztjük a P középpontú a sugarú és C középpontú, b sugarú körök Q metszéspontját. A keresett háromszög csak akkor létezik, ha a PQC háromszög létrejön, és szögei 120° -nál kisebbek. Ha ez így van, a PQ szakasz C -vel átellenes oldalára rajzolt PQA szabályos háromszög harmadik csúcsa a keresett háromszög következő csúcsa, és B -t az A körüli 60° -os forgatás adja C -ből, amelyik Q -t P -be viszi. A forgatás miatt ABC valóban szabályos háromszög. Mivel a PQC háromszög szögei 120° -nál kisebbek, A a PCQ szögtartományban van, az AC és PQ szakaszok metszik egymást. Így a Q -t P -be vivő forgatás C -t túlforgatja az AP irányon, P benne lesz a BAC szögtartományban. Az APC , $APB = AQC$ szögek kisebbek 180° -nál, és az összegük

$$\begin{aligned} \sphericalangle APC + \sphericalangle APB &= \sphericalangle APQ + \sphericalangle QPC + \sphericalangle AQP + \sphericalangle PQC = \\ &= 120^\circ + 180^\circ - \sphericalangle PCQ \end{aligned}$$

miatt nagyobb 180° -nál, hiszen a PCQ szög kisebb 120° -nál. Tehát a PBC szög kisebb 180° -nál, P valóban belső pontja az ABC háromszögnek. A csúcsoktól mért távolsága pedig rendre egyenlő, az adott szakaszokkal, hiszen $PA = PQ$, $PB = CQ$ a szerkesztés miatt.

Megjegyzések. 1. A cosinus tétel alapján látható, hogy ha az adott a , b , c szakaszok közül mondjuk a c a legnagyobb, akkor a szerkeszthetőség feltétele

$$c^2 < a^2 + ab + b^2.$$

2. Megoldhatjuk úgy is a feladatot, hogy felvesszünk egy a keresett ABC háromszöghöz hasonló tetszőleges szabályos $A'B'C'$ háromszöget, és benne a P -hez hasonló helyzetű P' pontot keressük az

$$A'P' : B'P' = a : b, \quad B'P' : C'P' = b : c$$

arányoknak megfelelő Apolloniusz-körök metszéseként. Aztán alkalmas hasonlósággal az egészet átépítjük a P pont köré.

3. Ha nem kötjük ki azt, hogy P az ABC háromszög belső pontja legyen, az eredeti szerkesztés során A helyett a PQ -ra vonatkozó tükröképét is vehetjük. Ebben az esetben csak az a szerkeszthetőség feltétele, hogy az adott a , b , c szakaszokkal háromszög legyen szerkeszthető, és általában két, különböző méretű ABC háromszöget kapunk.