

I. Megoldás. Definíció szerint $[x]$ jelenti azt a legnagyobb egész számot, amely x -nél nem nagyobb. Az x törtrésze a szokásos jelölés szerint

$$\{x\} = x - [x].$$

Ily módon az egyenlőtlenség a következő alakra hozható:

$$[5[x] + 5\{x\}] \geq [[x] + \{x\}] + \frac{[2[x] + 2\{x\}]}{2} + \dots + \frac{[5[x] + 5\{x\}]}{5}.$$

Felhasználva, hogy egész a esetén $[n + t] = n + [t]$, tovább alakíthatunk:

$$\begin{aligned} 5[x] + [5\{x\}] &\geq [x] + [\{x\}] + \frac{2[x]}{2} + \frac{2[\{x\}]}{2} + \dots + \frac{5[x]}{5} + \frac{[5\{x\}]}{5}, \\ [5\{x\}] &\geq [\{x\}] + \frac{[2\{x\}]}{2} + \frac{[3\{x\}]}{3} + \frac{[4\{x\}]}{4} + \frac{[5\{x\}]}{5}. \end{aligned}$$

Most négy esetet vizsgálunk:

1. Ha $0 \leq \{x\} < \frac{1}{5}$, akkor $[\{x\}] + \dots + \frac{[5\{x\}]}{5} = 0 = [5\{x\}]$;
2. Ha $\frac{1}{5} \leq \{x\} < \frac{2}{5}$, akkor $[\{x\}] + \dots + \frac{[5\{x\}]}{5} \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{47}{60} < [5\{x\}] = 1$;
3. Ha $\frac{2}{5} \leq \{x\} < \frac{3}{5}$, akkor $[\{x\}] + \dots + \frac{[5\{x\}]}{5} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{2}{4} + \frac{2}{5} = 1\frac{11}{15} < [5\{x\}] = 2$;
4. Ha $\frac{3}{5} \leq \{x\} < 1$, akkor $[\{x\}] + \dots + \frac{[5\{x\}]}{5} \leq \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} = 2\frac{43}{60} < 3 \leq [5\{x\}]$;

azt kapjuk tehát, hogy az egyenlőtlenségnek minden valós x megoldása.

II. megoldás. Könnyen belátható, hogy minden (a, b) valós számpár esetén $[a] + [b] \leq [a + b]$
Ezt többször alkalmazva kapjuk a következőt:

$$\begin{aligned} 120[5x] &= 24[5x] + 30[5x] + 20[5x] + 20[5x] + 15[5x] + 10[5x] + [5x] \geq \\ &\geq 24[5x] + 30([4x] + [x]) + 20([3x] + [2x]) + 20([3x] + [x] + [x]) + 15([2x] + \\ &+ [2x] + [x]) + 10([2x] + [x] + [x] + [x]) + ([x] + [x] + [x] + [x] + [x]) = \\ &= 120[x] + 60[2x] + 40[3x] + 30[4x] + 24[5x], \end{aligned}$$

Azaz minden valós x -re

$$120[5x] \geq 120[x] + 60[2x] + 40[3x] + 30[4x] + 24[5x].$$

Ezt 120-szal osztva kapjuk a feladat egyenlőtlenségét, ami azt jelenti, hogy minden valós szám megoldása az egyenlőtlenségnek.

Gaál Zsolt és Mályusz Levente (Debrecen, Fazekas M. Gimn. II. o. tanulók)
ötlete alapján