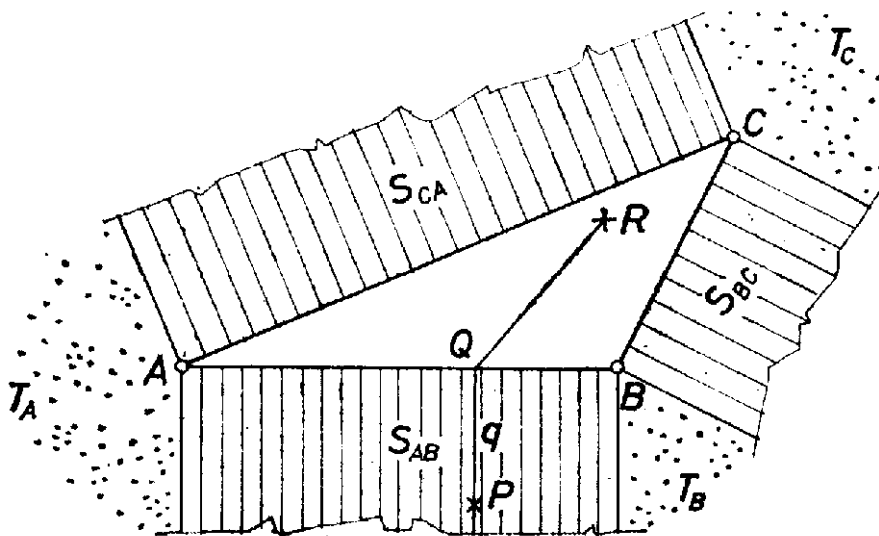


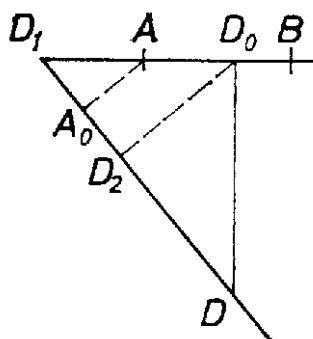
Legyen ABC tetszőleges háromszög, és legyen Q az AB szakasz tetszőleges belső pontja. Emeljünk Q -ban AB -re merőlegest, és jelöljük ennek az AB egyenes C -vel ellentétes oldalára eső darabját q -val. Ha P a q félegyenes tetszőleges, Q -tól különböző pontja, és R az AB egyenes C -t tartalmazó oldalán vagy az AB -n levő, Q -tól különböző pont, akkor a QR szakasz vagy PQ meghosszabbításán van, vagy PQ -val legalább 90° -os szöget zár be. Mindkét esetben igaz, hogy $PQ < PR$, vagyis P -hez az AB egyenes által határolt, P -t nem tartalmazó félsíkon (amelyhez most az AB egyenest is hozzávesszük) Q van a legközelebb. Igaz ez az ABC belsejében és határán levő pontokra is, hiszen azok a mondott félsíkokban vannak. Azt mondjuk ezért, hogy P -nek az ABC háromszögtől mért távolsága a PQ szakasz hosszával egyenlő.



Mondjuk azt továbbá a q félegyenes pontjaira, hogy Q felett vannak. Ha Q bejárja az AB szakaszt, a felette levő pontok egy sávot járnak be, amelyet az AB -re A -ban, illetve B -ben emelt merőlegesek határolnak. Jelöljük ezt a sávot S_{AB} -vel, az S_{AB} -ben levő pontokhoz tehát ABC pontjai közül az AB szakaszon levő vetületük van legközelebb (a sávot határoló egyeneseket nem számítjuk a sávhoz). Jelöljük S_{BC} -vel, illetve S_{CA} -val a BC és CA szakaszokból hasonlóan származtatott sávokat. Ezek pontjaihoz tehát ABC pontjai közül a BC , illetve CA szakaszok valamely belső pontja van legközelebb. Mivel ez a három tulajdonság páronként kizárja egymást, S_{AB} , S_{BC} , S_{CA} páronként diszjunktak. Következik ez abból is, hogy a sávokat határoló egyenesek közti 90° -os szögek közül még kettő együtt sem tudja lefedni a háromszög 180° -nál nagyobb kiegészítő szögeit. Jelöljük ezeknek a szögtartományoknak a le nem fedett részeit rendre T_A -val, T_B -vel és T_C -vel, például T_B a B -ben AB -re, illetve BC -re emelt merőlegesek közti szögtartomány. (Ezekhez hozzászámítjuk a határegyeneseket, azok közös pontja nélkül.)

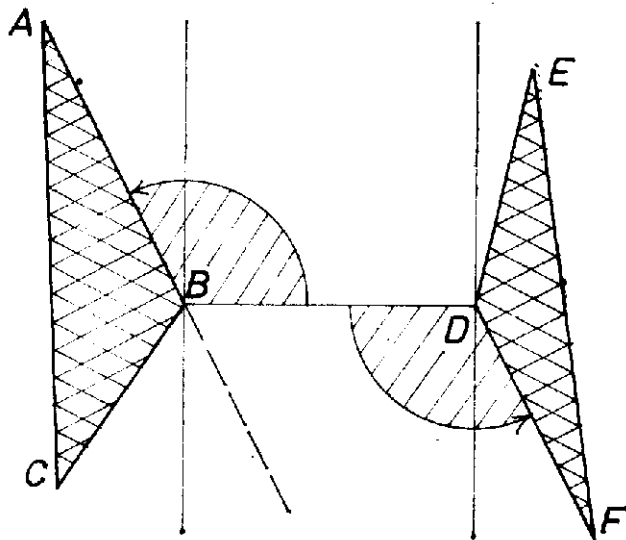
Ha U a T_B tartomány tetszőleges pontja, és V az ABC háromszög tetszőleges belső vagy határon levő pontja (de V nem azonos B -vel), akkor a BU , BV szakaszok közti szög legalább 90° , hiszen vagy az ABU vagy a CBU szöget tartalmazza. Emiatt $BU < VU$, tehát T_B pontjaihoz ABC pontjai közül B van legközelebb. Hasonlóan látható, hogy ABC pontjai közül T_A , T_C pontjaihoz A , illetve C van legközelebb.

Mivel a kapott hat tartomány lefedi a sík ABC háromszöghöz nem tartozó részét, az elmondottak alapján tetszőleges pontjukhoz meg tudjuk határozni az ABC pontjai közül hozzá legközelebb levő pontot. Legyen DEF tetszőleges háromszög, amelynek nincs ABC -vel közös pontja, és határozzuk meg egyrészt az ABC háromszög pontjai közül a D , E , F pontokhoz legközelebb levő pontokat, másrészt a DEF háromszög pontjai közül az A , B , C pontokhoz legközelebb levő pontokat. Jelöljük ezeket rendre D_0 -lal, E_0 -lal, F_0 -lal, illetve A_0 -lal, B_0 -lal, C_0 -lal. Válasszuk ki az AA_0 , BB_0 , CC_0 , DD_0 , EE_0 , FF_0 szakaszok közül a legkisebbet, vagy azok egyikét. Legyen ez, mondjuk, DD_0 . Két esetet különböztetünk meg aszerint, hogy D_0 csúcsa-e az ABC háromszögnek vagy sem.



Ha D_0 nem csúcs, hanem, mondjuk, az AB szakasz belső pontja, akkor AB a keresett egyenes. Ha ugyanis E vagy F az AB egyenes D -t nem tartalmazó felén vagy magán az AB egyenesen volna, a DE , illetve DF szakasz az AB egyenest csak az AB szakaszon kívül metszhetné. Ha ez a D_1 metszéspont, mondjuk, az AB egyenesnek A -n túli oldalán van, akkor A -nak a mondott szakasztól mért távolsága kisebb DD_0 -nál. Az ADD_1 háromszög ugyanis benne van a D_0DD_1 háromszögben, tehát kisebb a területe, és így kisebb a DD_1 közös alaphoz tartozó magassága is. Vagyis ha D_0 -nak a DD_1 egyenesen levő vetülete D_2 , akkor $AA_0 < D_0D_2$, és D_0D_2 nyilván kisebb D_0D -nél.

Ha D_0 csúcs, legyen, mondjuk, a B . Ekkor B -hez csak D lehet legközelebb, mivel $BB_0 \geq BD$. Emeljünk B -ben és D -ben merőlegest BD -re, ezek biztosan elválasztják az ABC és DEF háromszögeket.



Így ha a BD szakaszt B és D körül pozitív és negatív irányban addig forgatjuk, amíg bele nem ütközik az ABC , illetve DEF háromszögekbe, mindig legalább 90° -ot kell forgatnunk. Vegyük a négy forgatás legkisebbikét (vagy azok egyikét). Tartozzon ez, mondjuk, a BA félegyeneshez. Ekkor, ha ugyanezt a forgatást D körül megismételjük, közben még nem érjük el a DEF háromszöget, tehát az AB egyenes elválasztja a két háromszög belső pontjait.