

I. megoldás. A feltétel szerint $ac + bd = 2ab$, ahonnan rendezés után

$$ac - ab = ab - bd$$

adódik. Szorzattá alakítva

$$a(c - b) = b(a - d).$$

Két egyenlő szám szorzata nem lehet negatív, tehát

$$0 \leq ab(c - b)(a - d) = ac + bd - ab - cd = 1 - cd,$$

ahonnan $cd \leq 1$, amivel az állítást igazoltuk.

A fentiekből az is kiolvasható, hogy az adott feltételek mellett cd értéke csak akkor 1, ha $c = b$ vagy $a = d$.

II. megoldás. Az első feltételből adódó $b = \frac{1}{a}$ összefüggést a második egyenlőségbe helyettesítve, majd a -val szorozva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} ca^2 + d &= 2a, & \text{tehát a} \\ cx^2 - 2x + d &= 0 \end{aligned}$$

egyenletnek az a megoldása (mivel $ab = 1$, $a \neq 0$, így oszthattunk vele).

Ha $c = 0$, akkor a bizonyítandó állítás nyilván igaz. Ha $c \neq 0$, akkor a fenti egyenlet másodfokú, így abból, hogy létezik megoldása, következik, hogy a diszkriminánsa nem negatív, tehát $4 - 4cd \geq 0$, ahonnan 4-gyel való osztás és rendezés után a bizonyítandó állítás következik.

III. megoldás. Mivel ab pozitív, a és b egyező előjelűek. Ha c és d előjele különbözik vagy valamelyikük 0, akkor cd negatív vagy 0, tehát kisebb 1-nél. Emiatt a továbbiakban feltehetjük, hogy c és d előjele megegyezik. Az is könnyen látható, hogy c , d közös előjelének meg kell egyeznie a és b előjelével, mivel ellenkező esetben ac és bd negatív vagy 0 lenne, pedig $ac + bd = 2$.

Tehát a , b , c , d előjele megegyezik. Így ac , bd , cd , ab szorzatok mind pozitívak. Ekkor ac és bd mértani közepe nem lehet nagyobb a számtani közepénél, tehát

$$\sqrt{abcd} \leq \frac{ac + bd}{2} = 1,$$

innen $ab = 1$ miatt $\sqrt{cd} \leq 1$ és $cd > 0$ miatt $cd \leq 1$ adódik.

Egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha

$$ac = bd = 1, \quad \text{azaz} \quad a = \frac{1}{b} = \frac{1}{c} = d.$$

(K. G.)