

Oldjuk meg az alábbi egyenletet:

$$(1) \quad 1 - |x + 1| = \frac{[x] - x}{|x - 1|}.$$

I. megoldás. A tört nevezője nem lehet 0, ezért $x \neq 1$. A továbbiakban három esetet különböztetünk meg aszerint, hogy az egyes abszolút érték jelek hogyan bonthatók fel.

Ha $x > 1$, akkor $|x + 1| = x + 1$, $|x - 1| = x - 1$, és rendezés után (1) így alakul:

$$(1a) \quad [x] = 2x - x^2.$$

Mivel $x > 1$, ezért $[x] \geq 1$ is teljesül, így (1a) szerint $2x - x^2 \geq 1$, ahonnan rendezés után $(x - 1)^2 \leq 0$ adódik. Ez csak akkor teljesül, ha $x = 1$, amit viszont kizártunk.

Ha $-1 \leq x < 1$, akkor $|x + 1| = x + 1$, $|x - 1| = 1 - x$, így most az

$$(1b) \quad [x] = x^2$$

egyenletet kapjuk. Az adott intervallumban $[x]$ értéke -1 , vagy 0 , így csak $x^2 = 0$ lehetséges, hiszen x^2 nem lehet negatív. Ekkor $x = 0$, ami valóban megoldása (1)-nek.

Ha $x < -1$, akkor $|x + 1| = -(x + 1)$, $|x - 1| = 1 - x$, tehát most

$$(1c) \quad [x] = 2 - x^2$$

adódik.

Mivel $[x] > x - 1$, ezért (1c)-ből $x - 1 < 2 - x^2$, ahonnan $x < -1$ miatt $x > -\frac{\sqrt{13} + 1}{2} > -3$. Így $[x]$ szóba jövő értékei -2 , vagy -3 .

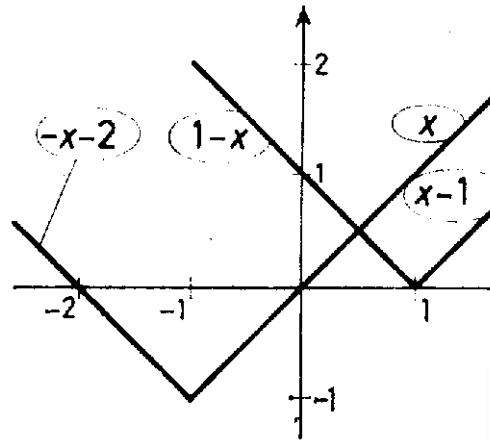
Ha $[x] = -2$, akkor (1c) alapján $x = -2$, amelyre valamennyi feltétel teljesül, ha pedig $[x] = -3$, akkor $x = -\sqrt{5}$, ami ugyancsak megoldás.

Így egyenletünknek három megoldása van. Ezek: $-\sqrt{5}$, -2 és 0 .

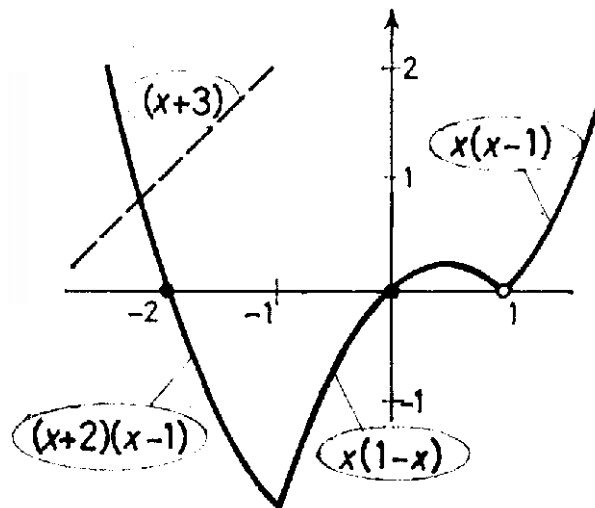
II. megoldás. Szorozzuk meg (1) mindkét oldalát $-|x - 1|$ -gyel, és ábrázoljuk a koordináta-rendszerben a kapott

$$(2) \quad |x - 1|(|x + 1| - 1) = x - [x]$$

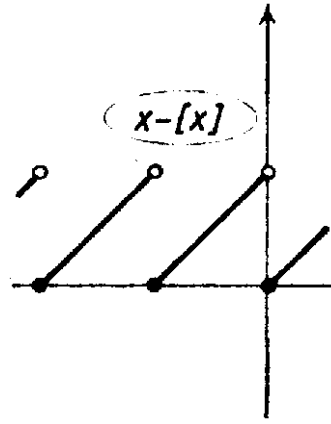
egyenlet két oldalán álló függvényeket.



1. ábra



2. ábra



3. ábra

A bal oldalon álló szorzat első tényezője $x \leq -1$ mellett $(-x - 2)$ -vel, $x > -1$ mellett x -szel egyenlő, a második tényező $x \leq 1$ mellett $(1 - x)$ -szel, $x > 1$ mellett $(x - 1)$ -gyel egyenlő (1. ábra). Így a bal oldal értéke rendre (2. ábra)

$$(x + 2)(x - 1), \quad x(1 - x), \quad \text{vagy} \quad x(x - 1)$$

aszerint, hogy

$$x \leq -2, \quad x \leq 1, \quad \text{vagy} \quad x > 1.$$

A jobb oldalon álló függvényt x tört részének hívják, és értéke tetszőleges x mellett 0 és 1 között van, hiszen $[x]$ nem lehet nagyobb x -nél, és nem lehet kisebb $(x - 1)$ -nél (3. ábra). Emiatt x értékét $(-\infty)$ felől növelve először -3 és -2 között lehet egyenlő a két függvény értéke, hiszen $x < -3$ mellett $x + 2 < -1$, $x - 1 < -4$, így $(x + 2)(x - 1) > 4$. Ha $-3 \leq x < -2$, akkor $[x] = -3$, tehát (2) ekvivalens az

$$(x + 2)(x - 1) = x + 3$$

egyenlettel, amiből a műveletek elvégzése után az $x^2 = 5$ egyenletet kapjuk. Ennek az adott szakaszon $x = -\sqrt{5}$ a gyöke, ami (1)-nek is gyöke. Tovább menve $x = -2$ is gyök, viszont $-2 < x < 0$ mellett a bal oldal értéke negatív, tehát ezen a szakaszon nincs gyök. A szakasz $x = 0$ végpontja ismét gyök, és $0 < x < 1$ mellett a bal oldal értéke kisebb x -nél, így itt nincs további gyök. Az $x = 1$ végpont (2)-nek ugyan gyöke, de (1)-nek nem. További gyök nincs, mert $x > 1$ mellett a bal oldal értéke nagyobb $(x - 1)$ -nél, és ez nagyobb a jobb oldal értékénél.