

Az első két tag összege négyzetszám, ugyanis $2^8 + 2^{11} = 2^8(1 + 2^3) = 2^8 \cdot 9 = 48^2$. Így ha k olyan egész, melyre $2^8 + 2^{11} + 2^n = k^2$, akkor

$$2^n = k^2 - 48^2 = (k - 48)(k + 48).$$

Föltehető, hogy k pozitív, ekkor a jobb oldalon pozitív egészek szorzata áll. Ha ez a szorzat 2-hatvány, akkor a tényezők is 2 hatványai. Léteznek tehát olyan p és q nem negatív egészek, melyekre $p < q$ és $2^p = k - 48$, valamint $2^q = k + 48$.

A most kapott egyenletek közül a másodikból az első kivonva

$$2^q - 2^p = 96,$$

azaz

$$2^p(2^{q-p} - 1) = 2^5 \cdot 3$$

adódik.

Ismeretes, hogy minden pozitív egész szám egyértelműen bontható föl egy páratlan szám és egy természetes kitevőjű 2-hatvány szorzatára. Mivel $q > p$, így $2^{q-p} - 1$ páratlan, tehát esetünkben

$$2^p = 2^5 \quad \text{és} \quad 2^{q-p} - 1 = 3.$$

Emiatt $p = 5$ és $q = 7$, tehát

$$2^n = 2^p \cdot 2^q = 2^{12}.$$

A feladat egyetlen megoldása tehát $n = 12$. Ekkor $2^8 + 2^{11} + 2^{12} = 80^2$.

U. G.