

I. megoldás. Jelöljük a háromszög oldalait, szögeit a szokásos módon, a körülírt körének sugarát r -rel. Tudjuk, hogy az oldalak kifejezhetők a sugár segítségével:

$$a = 2r \sin \alpha, \quad b = 2r \sin \beta, \quad c = 2r \sin \gamma.$$

Innen

$$(1) \quad a^2 + b^2 + c^2 = 4(\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma), \quad \text{mivel } r = 1.$$

Ezt a kifejezést kell vizsgálnunk. Felhasználva a háromszögben fennálló következő összefüggéseket

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ, \quad \sin \gamma = \sin(\alpha + \beta).$$

Továbbá hogy

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \quad \text{és} \quad \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha,$$

alakítsuk (1)-et szorzattá

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= 4 \left(1 - \cos^2 \alpha + 1 - \cos^2 \beta + (\sin(\alpha + \beta))^2 \right) = \\ &= 4(2 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta + \sin^2 \alpha \cos^2 \beta + \cos^2 \alpha \sin^2 \beta + 2 \sin \alpha \cos \beta \cos \alpha \sin \beta) = \\ &= 4 \left[2 - \cos^2 \alpha \underbrace{(1 - \sin^2 \beta)}_{\cos^2 \beta} - \cos^2 \beta \underbrace{(1 - \sin^2 \alpha)}_{\cos^2 \alpha} + 2 \sin \alpha \cos \beta \cos \alpha \sin \beta \right] = \\ &= 4 \left[2 - 2 \cos^2 \alpha \cos^2 \beta + 2 \sin \alpha \cos \beta \cos \alpha \sin \beta \right] = \\ &= 8 \left[1 + \cos \alpha \cos \beta (\sin \alpha \sin \beta - \cos \alpha \cos \beta) \right]. \end{aligned}$$

Könnyű belátni, hogy a kerek zárójelben álló kifejezés nem más, mint a $\cos(\alpha + \beta)$ (-1) -szerese, de $\alpha + \beta = 180^\circ - \gamma$ miatt $[-\cos(\alpha + \beta)] = \cos \gamma$. Azaz

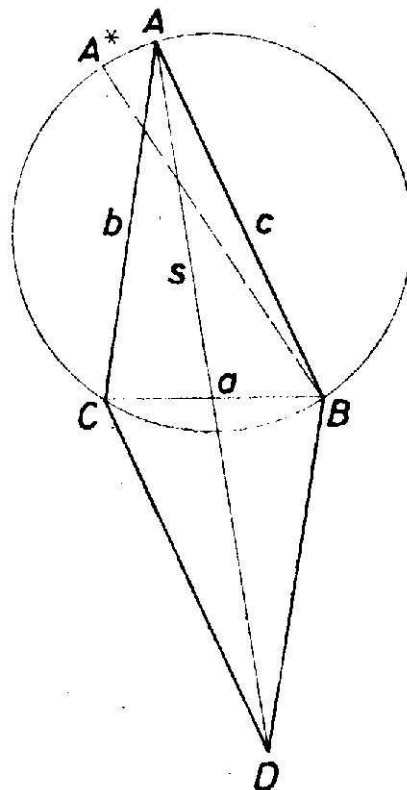
$$a^2 + b^2 + c^2 = 8(1 + \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma).$$

Ha a háromszög hegyesszögű, akkor mindhárom szögének cosinusa pozitív, tehát az $a^2 + b^2 + c^2 > 8$ teljesül.

Ha a háromszög derékszögű, akkor valamelyik tényező 0, s így valóban $a^2 + b^2 + c^2 = 8$.

És végül, tompaszögű háromszög esetén csak egy cosinus lehet negatív (a háromszögben csak egy tompaszög lehet), s emiatt a szorzat negatív, azaz a négyzetösszeg kisebb 8-nál.

II. megoldás. Tegyük fel, hogy $a \leq b \leq c$, és jelöljük az a -val, b -vel, c -vel szemközti csúcsokat A -val, B -vel, C -vel, A -nak BC felezőpontjára vonatkozó tükörképét D -vel.



Az $ABCD$ paralelogrammában

$$2(b^2 + c^2) = a^2 + 4s^2,$$

ahol s az ABC háromszög A -hoz tartozó súlyvonalának a hosszát jelöli. Adjunk mindkét oldalhoz $2a^2$ -et, kapjuk, hogy

$$2(a^2 + b^2 + c^2) = 3a^2 + 4s^2.$$

Ha tehát a háromszög köré írható körön a B , C csúcsok rögzítettek, és A mozog, akkor a bal oldal értéke s monoton függvénye. Így ha hegyesszögű háromszögben A -t a B -vel átellenes A^* helyzetbe toljuk, akkor az $(a^2 + b^2 + c^2)$ az új helyzetben kisebb lesz, mint a régiben. Ha viszont C -nél tompaszög volt (az $a \leq b \leq c$ feltétel miatt csak ott lehetett), akkor az új helyzetben nagyobb lesz a négyzetösszeg, mint a régiben. Az pedig, hogy ha A azonos A^* -gal, $a^2 + b^2 + c^2 = 2BA^{*2} = 8$, Pitagorasz tételéből látható.