

I. megoldás. Ha $1 \leq x < y$, akkor $[x, y]$ legalább kétszer akkora, mint x , emiatt $\frac{1}{[x, y]} \leq \frac{1}{2x}$. Ezt felhasználva a bizonyítandó egyenlőtlenség bal oldala felülről becsülhető :

$$\frac{1}{[a, b]} + \frac{1}{[b, c]} + \frac{1}{[c, d]} + \frac{1}{[d, e]} \leq \frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{2c} + \frac{1}{2d}.$$

Ha $c \geq 4$, akkor $d > c$ miatt $d \geq 5$, másrészt $a \geq 1$ és így $b \geq 2$, tehát

$$\frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{2c} + \frac{1}{2d} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10},$$

ami valóban kisebb 1-nél.

Ha $c < 4$, akkor $a = 1$, $b = 2$ és $c = 3$, tehát $d \geq 4$. Ekkor

$$\frac{1}{[a, b]} + \frac{1}{[b, c]} + \frac{1}{2c} + \frac{1}{2d} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} < 1,$$

tehát ebben az esetben is beláttuk az állítást.

Magyar Ákos (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., I. o. t.)

II. megoldás. Egy jobb becsléssel elkerülhető az esetszétválasztás. Mivel $[x, y]$ az x -nek is és az y -nak is többszöröse, ezért xy -nak $y[x, y]$ és $x[x, y]$ is többszöröse. Emiatt e két utóbbi szám különbsége is többszöröse xy -nak. Ha tehát ez a különbség nem 0, akkor az abszolút értéke legalább xy . Így ha $0 < x < y$, akkor

$$y[x, y] - x[x, y] \geq xy,$$

ahonnan $[x, y] \cdot x \cdot y$ -nal való osztás után azt kapjuk, hogy

$$(2) \quad \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \geq \frac{1}{[x, y]}.$$

Ezt alkalmazva

$$\begin{aligned} & \frac{1}{[a, b]} + \frac{1}{[b, c]} + \frac{1}{[c, d]} + \frac{1}{[d, e]} \leq \\ & \leq \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) + \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right) + \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{d} \right) + \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{e} \right) = \frac{1}{a} - \frac{1}{e} \end{aligned}$$

adódik, ami valóban kisebb, mint 1.

Megyesi Gábor (Szeged, Juhász Gy. Tanárképző Főisk. I. sz. Gyak. Isk., 8. o. t.)

Megjegyzések. 1. A feladatra nagyon sok hibás dolgozat érkezett. Ezek legtöbbszörében egy, a kitűzőtnél élesebb – egyébként igaz – állítás „bizonyítása” szerepelt. Eszerint a bal oldal maximuma $1 - \frac{1}{16}$. Gondolatmenetük lényegében a következő volt :

»Mivel $\frac{1}{[x, y]} \leq \frac{1}{2x}$, így $\frac{1}{[a, b]} \leq \frac{1}{2}$; az első tag tehát akkor maximális, ha $a = 1$ és $b = 2$. Ekkor $\frac{1}{[b, c]} = \frac{1}{[2, c]} \leq \frac{1}{4}$ és ez is csak akkor lehetséges, ha $c = 4$. Ha $c = 4$, akkor $\frac{1}{[c, d]} \leq \frac{1}{8}$ és így $d = 8$, és ugyanígy $e = 16$, a bal oldal maximuma tehát $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = 1 - \frac{1}{16}$.«

Ez a gondolatmenet hibás, bár az eredmény igaz. Ha valamit több lépésben kell maximalizálnunk, akkor nem feltétlenül akkor kapjuk a legjobb eredményt, ha minden lépésben az akkor lehetséges legnagyobb növekedést igyekszünk elérni. Esetünkben kimondatlanul feltételeztük, hogy a bal oldal akkor maximális, ha már az első tag is a lehető legnagyobb. Ez a és b értékét meghatározza, ha most megint „a lehető legtöbbet akarjuk”, akkor ez c -t is egyértelművé teszi, és így tovább. Lehetséges azonban, hogy ha eleinte túl mohók vagyunk, az a későbbiekben nagyon megköti a kezünket.

Egy nyilvánvaló példa a fentiek illusztrálására az alábbi. Tegyük fel, hogy két nemnegatív szám összege 1, és a szorzatukról szeretnénk elérni, hogy a lehető legnagyobb legyen. Az első tényező nyilván akkor a legnagyobb, ha 1, de így a második tényező már csak 0 lehet, és a szorzat láthatóan nem lesz maximális.

Egy másik példához jutunk, ha az eredeti feladatot kissé módosítjuk. Az idézett rossz megoldásokban azt „igazolták”, hogy a feltételek esetén

$$\frac{1}{[a, b]} + \frac{1}{[b, c]} + \frac{1}{[c, d]} + \frac{1}{[d, e]}$$

akkor maximális, ha $a = 1$, $b = 2$, $c = 4$, $d = 8$ és $e = 16$. Ha ehelyett

$$(3) \quad \frac{1}{\sqrt{[a, b]}} + \frac{1}{\sqrt{[b, c]}} + \frac{1}{\sqrt{[c, d]}} + \frac{1}{\sqrt{[d, e]}}$$

maximumát keressük, akkor az idézett „megoldás” szerint

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{8}} + \frac{1}{\sqrt{16}} = 1,81\,066$$

adódik, ez azonban most nem maximum, mert ha $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$, $d = 6$, $e = 12$, akkor (3) értéke

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{12}} = 1,81\,228.$$

Jól látható, hogy az összeg második tagja csökkent, de ennek révén a harmadik és a negyedik tagot növelhettük, úgy, hogy az összeg meghaladja az előző értékét.

2. Említettük, hogy igaz egy élesebb állítás is. Ezt be is látjuk n számra ($n \geq 2$), n -re vonatkozó teljes indukcióval.

Legyen tehát $1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_n$, a_i egész. Ekkor azt állítjuk, hogy

$$(4) \quad \frac{1}{[a_1, a_2]} + \frac{1}{[a_2, a_3]} + \dots + \frac{1}{[a_{n-1}, a_n]} \leq 1 - \frac{1}{2^n}.$$

Ha $n = 2$, akkor ez az $\frac{1}{[a_1, a_2]} \leq \frac{1}{2a_1} \leq \frac{1}{2}$ becslés miatt igaz.

Tegyük fel, hogy az állítás igaz n számra, és lássuk be, hogy ekkor $(n+1)$ számra is igaz. Két esetet különböztetünk meg.

1. eset: $a_{n+1} < 2^{n+1}$. Ekkor a II. megoldás becslése szerint

$$\frac{1}{[a_1, a_2]} + \frac{1}{[a_2, a_3]} + \dots + \frac{1}{[a_n, a_{n+1}]} \leq \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{n+1}} < \frac{1}{a_1} - \frac{1}{2^{n+1}} \leq 1 - \frac{1}{2^{n+1}}.$$

2. eset: $a_{n+1} \geq 2^{n+1}$. Nyilván $[a_n, a_{n+1}] \geq a_{n+1}$, így most $\frac{1}{[a_n, a_{n+1}]} \leq \frac{1}{2^{n+1}}$. Az indukciós feltevést felhasználva

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{[a_1, a_2]} + \frac{1}{[a_2, a_3]} + \dots + \frac{1}{[a_{n-1}, a_n]} \right) + \frac{1}{[a_n, a_{n+1}]} \leq \\ & \leq \left(1 - \frac{1}{2^n} \right) + \frac{1}{2^{n+1}} = 1 - \frac{1}{2^{n+1}}. \end{aligned}$$

Ezzel az állítást beláttuk. A bizonyításból az is látszik, hogy (4)-ben pontosan akkor van egyenlőség, ha $a_i = 2^{i-1}$, $i = 1, 2, \dots, n$.