

Vezessük be a λ és μ nemnegatív számokat, amelyekkel $OA' = \lambda \cdot OA$ és $OB' = \mu \cdot OB$. Ezeket a kifejezéseket (1)-be helyettesítve azt kapjuk, hogy

$$\frac{\lambda}{\mu} \left(\frac{OA}{OB} \right)^2 = \left(\frac{1+\lambda}{1+\mu} \right)^2 \left(\frac{OA}{OB} \right)^2.$$

Ha OAB és $OA'B'$ valódi háromszögek akkor OA nem nulla, tehát szükségképpen

$$\frac{\lambda}{\mu} = \left(\frac{1+\lambda}{1+\mu} \right)^2.$$

Másrészt μ sem lehet nulla, ezért ez esetben (1)-gyel egyenértékű a következő kifejezés:

$$\lambda(1+\mu)^2 = \mu(1+\lambda)^2.$$

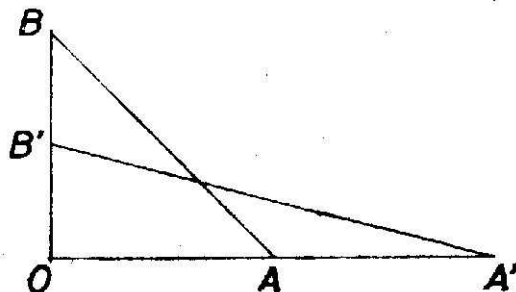
Azonos átalakítások révén ebből azt kapjuk, hogy

$$(\lambda - \mu)(1 - \lambda\mu) = 0.$$

Két eset lehetséges.

I. $\lambda - \mu = 0$, vagyis $\lambda = \mu$. Ekkor az OAB és $OA'B'$ háromszögek valóban hasonlóak.

II. $1 - \lambda\mu = 0$, vagyis $\lambda = \frac{1}{\mu}$. Ekkor egyáltalán nem biztos, hogy az OAB és $OA'B'$ háromszögek hasonlóak. Ezt egy példával mutatjuk meg. Az O -ból induló a , b félegyenesek legyenek egymásra merőlegesek. Legyen $OA = OB = 1$, továbbá $\lambda = 2$ és $\mu = \frac{1}{2}$ (1. ábra).



Az OAB háromszög derékszögű egyenlő szárú háromszög, míg az $OA'B'$ háromszög derékszögű, de nem egyenlő szárú.

Mit válaszoljunk ezek után a kérdésre, miszerint igaz-e, hogy az OAB és $OA'B'$ háromszögek hasonlóak? Azt kell válaszolnunk, hogy nem tudjuk eldönteni a kérdést. Ehhez (1) nem nyújt elegendő alapot. (**L. L.**)

Megjegyzés. Meglepően nagy nehézséget okozott a feladat megoldása. Sokan nem merték elhinni, hogy az állítás nem igaz. Mások indirekt bizonyítással próbálkoztak, de nem vették észre, hogy nincs ellentmondás. Tipikus hiba volt az is, hogy az $A \Rightarrow B$ alakú állítást $B \Rightarrow A$ alakban bizonyították, még ha fel is merült az, hogy bizonyítani kellene azt, hogy $(\text{nem } B) \Rightarrow (\text{nem } A)$ (Pedig hamar találtak volna ellenpéldát.)

Akik algebrailag alakították át először a kifejezést, azok közül többen nem tudtak mit kezdeni a szokásos „ekvivalens átalakítást végeztünk” címkével. Többen osztottak egy olyan kifejezéssel, ami lehet 0, de erre nem gondoltak. Sokakat megzavart egy-egy rossz ábra, például A , A' , illetve B , B' sorrendjét nem cserélték fel. Többen foglalkoztak (feleslegesen) azzal az esettel, amikor A , B , ill. A' , B' van egy-egy félegyenesen.