

Hány egész megoldása van az alábbi egyenletnek?

$$(1) \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{1981}.$$

A törtet eltávolítva és rendezve kapjuk, hogy

$$3xy - 1981x - 1981y = 0.$$

Itt a bal oldal szorzattá alakítható, ha megszorozzuk 3-mal, és hozzáadunk 1981^2 -t:

$$(2) \quad (3x - 1981)(3y - 1981) = 1981^2.$$

Ennek az egyenletnek ugyan $x = y = 0$ is gyöke, ami nyilván nem gyöke (1)-nek, de (2) minden további gyöke gyöke (1)-nek, és (1) gyökei mind gyökei (2)-nek, hiszen az xy -nal való szorzás csak az $x = 0$ vagy $y = 0$ újabb gyököket hozhatja be, és ha x, y közül az egyik 0, akkor (2) szerint a másik is az.

Elegendő tehát a (2) egyenlet 0-tól különböző egész megoldásait összeszámolni. Ha x és y 0-tól különböző egészek, akkora (2) szerint az $A = 3x - 1981$ szám az $N = 1981^2 = 7^2 \cdot 283^2$ szám (-1981) -től különböző osztója. Megfordítva, N valamely A osztójából kiindulva akkor kapjuk (2) valamely egész megoldását, ha $A + 1981$ is, és $\frac{1981^2}{A} + 1981$ is osztható 3-mal. Mivel 1981 3-mal osztva 1 maradékot ad, ehhez szükséges és elegendő, hogy $A + 1$ osztható legyen 3-mal. Tehát A megfelelő értékei a következők:

$-1, -7, -283, -7^2, -283^2, -7^2 \cdot 283, -7 \cdot 283^2, -7^2 \cdot 283^2$, és (1) egész megoldásainak száma 8.