

Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert:

$$\begin{aligned}(1) \quad & x^2 + xy + y = 1 \\(2) \quad & y^2 + xy + x = 5\end{aligned}$$

I. megoldás. Emeljük ki mindkét egyenletben az első két tag közös tényezőit, és $x + y$ helyére írunk S -et:

$$(1a) \quad xS + y = 1,$$

$$(2a) \quad yS + x = 5.$$

Összeadva a két egyenletet, és $x + y$ helyére ismét S -et írva, S -re másodfokú egyenletet kapunk:

$$S^2 + S = 6.$$

Ebből S értéke teljes négyzetté való kiegészítéssel kapható meg:

$$(S + 0,5)^2 = 6,25,$$

tehát $S = -0,5 \pm 2,5$. Ha már tudjuk S értékét, az

$$x + y = S$$

összefüggést (1a)-ból, illetve (2a)-ból kivonva kapjuk, hogy

$$x = \frac{1-S}{S-1} = -1, \quad y = \frac{5-S}{S-1}.$$

Végül az utóbbi alapján $y_1 = \frac{5-2}{2-1} = 3$, $y_2 = \frac{5+3}{-3-1} = -2$. Behelyettesítéssel meggyőződhetünk róla, hogy mindkét gyökpár kielégíti az eredeti egyenletrendszert.

II. megoldás. Az (1) egyenlet két oldalának a különbsége szorzattá alakítható:

$$(1b) \quad (x+1)(x+y-1) = 0,$$

tehát vagy $x = -1$, vagy $x + y = 1$. Ha $x = -1$, a (2) egyenlet szerint $y^2 - y = 6$, ami ismét teljes négyzetté való kiegészítéssel oldható meg:

$$(y - 0,5)^2 = 6,25,$$

tehát $y = 0,5 \pm 2,5$. Ha $x + y = 1$, a (2) egyenlet (2a) alakja szerint $x + y = 5$ volna, ami nyilvánvaló ellentmondás. Tehát csak az $x = -1$, $y = 0,5 \pm 2,5$ értékek lehetnek az (1)–(2) rendszer gyökei. Most nem kell a kapott gyököket ellenőrizni, hiszen – mint láttuk – $x = -1$ mellett (1) az y értékétől függetlenül teljesül, és ha $x = -1$, akkor y értékét éppen (2) alapján határoztuk meg.