

Öt elemből tízféle pár készíthető. Ha a keresett öt szám között például A és B egyenlő volna, akkor ezeket a C , D , E számokkal párba állítva rendre egyenlő összegeket kapnánk. Emiatt csak akkor várhatjuk, hogy kilenc különböző összeg állítható elő a számokból, ha azok között nincsenek egyenlők. Tegyük fel, hogy a keresett számok nagysága az ABC szerinti sorrendjükben nő:

$$(1) \quad A < B < C < D < E.$$

Olyan számokat keresünk, amelyek tíz páronkénti összege közül vagy az összes 1 és 9 közötti egész, vagy pontosan egy összeg értéke nem 1 és 9 közötti egész. Az első esetben csak egy olyan 1 és 9 közötti egész lehet, amelyik kétszer fordul elő az összegek között. Jelöljük ezt a számot X -szel. A második esetben legyen X a nem 1 és 9 közötti egész összeg. Ha a keresett számokat az

$$(2) \quad A' = 5 - E, \quad B' = 5 - D, \quad C' = 5 - C, \quad D' = 5 - B, \quad E' = 5 - A$$

számokkal helyettesítjük, ezek páronkénti összegei az eredeti összegeket 10-re kiegészítő számok lesznek. Megfelelő számokból tehát megfelelő számokat kapunk, és a hozzájuk tartozó tizedik összeg $X' = 10 - X$. Emiatt feltehetjük, hogy $X \geq 5$, ebben az esetben az öt legkisebb összeg értéke 1, 2, 3, 4 és 5.

Nézzük meg, mivel lehetnek egyenlők az $A + B$, $A + C$, $B + C$ összegek. Az első kettő értéke csak 1 és 2 lehet, hiszen a tíz lehetséges páronkénti összeg között ezek a legkisebbek. Az már nem biztos, hogy $B + C$ egyenlő 3-mal, mert $A + D$ értéke, vagy akár $A + E$ értéke is kisebb lehet $B + C$ -nél. Más eset azonban nem lehet, tehát $B + C$ értéke 3, 4 vagy 5 lehet.

Ha $B + C = 3$, akkor $A = 0$, $B = 1$, $C = 2$ és 4-gyel csak $A + D$ lehet egyenlő, hiszen ennél minden más páronkénti összeg nagyobb. Tehát $D = 4$, és ekkor $B + D = 5$, $C + D = 6$, továbbá az $(A + E)$, $(B + E)$, $(C + E)$, $(D + E)$ összegek között csak akkor fordulhatnak elő a 7, 8, 9 számok, ha $E = 7$. Ekkor $X = D + E = 11$.

Ha $B + C = 4$, akkor $A = -0,5$, $B = 1,5$, $C = 2,5$ és 3-mal $(A + D)$ -nek kell egyenlőnek lennie. Tehát $D = 3,5$ és ekkor $B + D = 5$, $C + D = 6$, és így $E = 5,5$, $X = A + E = B + D = 5$.

Ha $B + C = 5$, akkor $A = -1$, $B = 2$, $C = 3$, és 3-mal ismét $(A + D)$ -nek kell egyenlőnek lennie. Tehát $D = 4$, és $B + D = 6$, $C + D = 7$. Most az $(A + E)$, $(B + E)$, $(C + E)$, $(D + E)$ összegek között a 4, 8, 9 számoknak kell előfordulniuk, így $E = 5$, $X = C + D = B + E = 7$. Összefoglalva eddigi eredményeinket, a (2)-ből kapott megoldásokat is figyelembe véve, az (1) feltétel mellett a következő öt megoldást kapjuk:

A	B	C	D	E	X
0	1	2	4	7	11
-0,5	1,5	2,5	3,5	5,5	5
-1	2	3	4	5	7
0	1	2	3	6	3
-2	1	3	4	5	-1

Tehát a feladat első kérdésére „igen” a válasz. Mivel az összes esetet sorra vettük, és X értéke egyikben sem volt 0, a második kérdésre „nem” a helyes válasz.

Megjegyzés. Megállhattunk volna a megoldásunkban a $B + C = 3$ eset vizsgálata után, hiszen elegendő egyetlen megfelelő szám-ötöst találni ahhoz, hogy az első kérdésre válaszoljunk. Nincs szükség az összes lehetséges eset soravételére a második kérdés megválaszolásához sem, hiszen $X = 0$ mellett a tíz páronkénti összeg összege 45 volna, amiből

$$(A + B) + (B + C) + (C + D) + (D + E) + (E + A) = 2(A + B + C + D + E) = 22,5$$

következne, ami nem egyeztethető össze azzal, hogy bármely két szám összege egész.