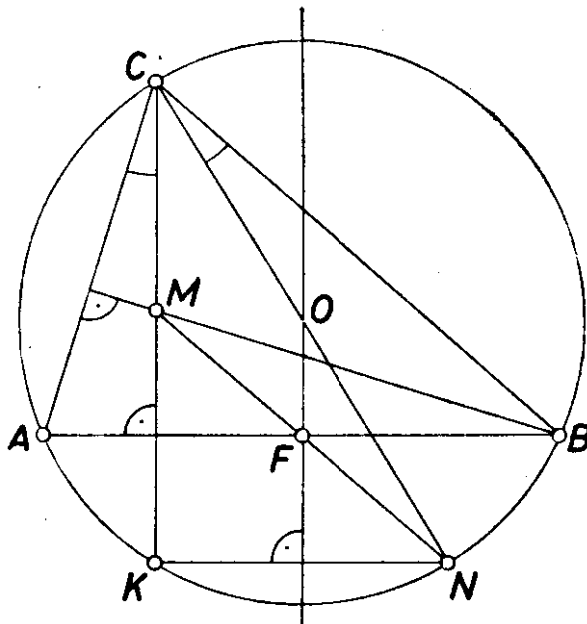


Előre kell bocsátanunk, hogy a feladat állítása csak abban az esetben igaz, ha a háromszög C -nél levő szöge hegyesszög.

Jelöljük O -val az ABC háromszög köré írható kör középpontját, és F -fel az AB oldal felezőpontját. Ha M -et az AB -re tükrözzük, majd az így kapott K pontot tükrözzük az AB oldal felező merőlegesére, akkor végeredményben az N ponthoz jutunk, mivel két egymásra merőleges egyenesre vonatkozó egymás utáni tengelyes tükrözés egyenértékű a tengelyek metszéspontjára vonatkozó tükrözéssel. Tudjuk, hogy K a háromszög köré írt körre esik, így N ugyancsak rajta van e körön, hiszen a háromszög köré írt kör szimmetrikus az AB oldal felező merőlegesére. A tükrözés folytán $\widehat{AK} = \widehat{BN}$.

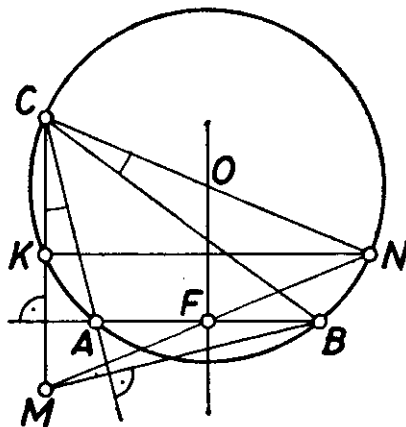


1. ábra

Ha az ABC háromszög hegyesszögű (1. ábra), akkor C -t nem tartalmazza az $\widehat{AK}$, $\widehat{BN}$ ívek egyike sem, mivel az AB egyenes elválasztja C -t a K , N pontoktól. A kerületi szögek tétele értelmében ezért $\angle ACK = \angle BCN$. Mivel C , M , K egy egyenesbe esnek, és C nem választja el M -et K -tól, az $\angle ACK$ azonos az $\angle ACM$ -gel. Ebben az esetben tehát igaz az állítás.

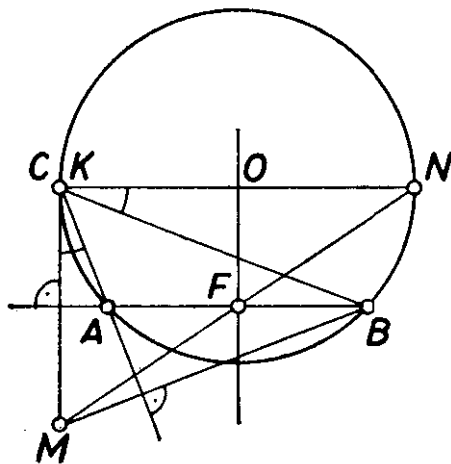
Ha a C -nél levő szög továbbra is hegyesszög, de a háromszögnek mondjuk az A -nál levő szöge tompaszög, akkor aszerint, hogy O kisebb, egyenlő vagy nagyobb távolságra van az AB egyenestől, mint C , az $\widehat{AK}$ kisebb, egyenlő vagy nagyobb $\widehat{AC}$ -nél (2a, 2b, 2c ábra).

Ha $\widehat{AK}$ kisebb $\widehat{AC}$ -nél, akkor mivel $\widehat{AK}$ nem tartalmazza C -t, $\angle ACK = \angle BCN$, és mivel C nem választja el M -et K -tól, ezért $\angle ACM = \angle ACK$ (2a ábra).



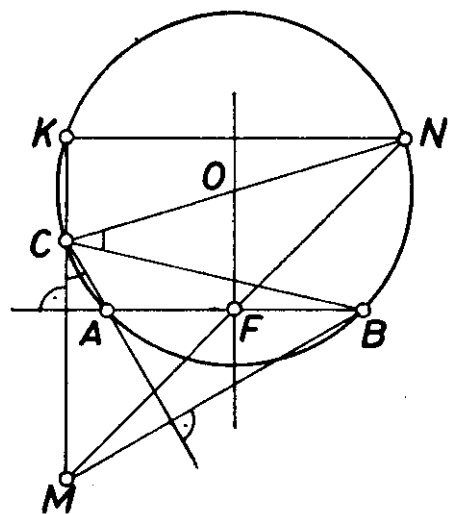
2a ábra

A 2b ábrán látható esetben K egybeesik C -vel. Az AB -vel párhuzamos OC merőleges CM -re, tehát $\angle ACM$ érintőszárú kerületi szög, ezért ugyanakkora, mint a vele egyenlő íven nyugvó $\angle BCN$ kerületi szög.



2b ábra

A 2c ábra azt az esetet mutatja, amikor $\widehat{AK}$ nagyobb $\widehat{AC}$ -nél. $\widehat{AK}$ tartalmazza C -t, $\angle ACK < \angle BCN$ ezért a $\angle BCN$ kiegészítő szöge, de kiegészítő szöge az $\angle ACM$ -nek is, hiszen C elválasztja M -et K -tól. Ezek szerint $\angle ACM < \angle BCN$.

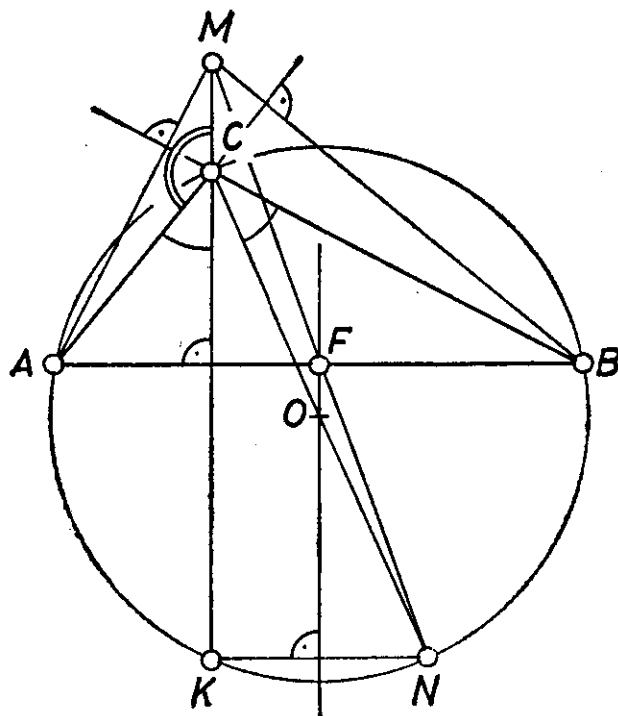


2c ábra

Tehát mindhárom esetben igaz a bizonyítandó állítás. Hasonló megállapításokat tehetünk akkor is, ha az ABC háromszögnek B -nél van tompaszöge.

Ha az ABC háromszög A -nál vagy B -nél levő szöge derékszög, akkor M a derékszög csúcsával, N pedig az AB másik végpontjával esik egybe. Mindkét esetben közvetlenül ellenőrizhető, hogy az állítás teljesül.

Ha C -nél tompaszög van, akkor ugyan fennáll, hogy $\angle ACK < \angle BCN$, de C elválasztja K -t és M -et, így az $\angle ACM < \angle BCN$ kiegészítő szöge az $\angle ACK$ -nek, ami nem lehet 90° -os, ezért $\angle ACM < \angle BCN$ (3. ábra).



3. ábra

Végül nézzük azt az esetet, amikor C -nél derékszög van. Ekkor C és M egybeesnek, ezért az ACM -ről nincs is értelme beszélni, míg a BCN jól meghatározott szög. Következésképp ebben az esetben sem igaz az állítás.

Megjegyzés. A megoldók nagy része igaznak találta az állítást, mivel csak hegyesszögű háromszöggel foglalkozott, és erre az esetre sikerült is azt bebizonyítani. Ezek dolgozatára kevesebb pontot adtunk, mint azokéra, akik a tompaszögű esetet is megvizsgálták.