

A feladat szövege szerint $A = 0,111\,111\,1111 = \frac{1}{9} \cdot 0,999\,999\,9999 =$
 $= 9\frac{1}{9}(1-10^{-10})$, tehát $\sqrt{A} = \frac{1}{3}\sqrt{(1-10^{-10})}$, így tulajdonképpen $B = 1-10^{-10}$ négyzetgyökét kell nagy pontossággal meghatároznunk. Az $(1-x)^2 = 1-2x+x^2$ azonosság azt sugallja ($2x = 10^{-10}$ választással), hogy B négyzetgyöke közel van $C = 1 - \frac{1}{2} \cdot 10^{-10} = (1 - 5 \cdot 10^{-11})$ -hez, hiszen ennek a négyzete mindössze $x^2 = 25 \cdot 10^{-22}$ -vel több B -nél. Nézzük, mennyivel elég csökkentetünk C -t, hogy $\sqrt{B}$ -nél kisebb értéket kapjunk. Csökkentsük C -t y -nal, a $C-y < \sqrt{B}$ egyenlőtlenség pontosan akkor áll fenn, ha $C^2 - 2Cy + y^2 < B$, azaz ha

$$(1) \quad 25 \cdot 10^{-22} + 10^{-10}y + y^2 < 2y.$$

Ez (és $y < C$ is) biztosan teljesül, ha y -nak a $25 \cdot 10^{-22}$ értéket választjuk. Valóban ekkor $10^{-10} + y < 1$, vagyis $10^{-10}y + y^2 < y$, s mindkét oldalhoz y -t adva éppen (1)-et kapjuk. Az kaptuk tehát, hogy

$$1 - 5 \cdot 10^{-11} - 25 \cdot 10^{-22} < \sqrt{B} < 1 - 5 \cdot 10^{-11}.$$

$$\begin{aligned} &\text{Ebből } \sqrt{A} \text{ értékére alsó korlát } \frac{1}{3}(1 - 5 \cdot 10^{-11} - 25 \cdot 10^{-22}) = \\ &= \frac{1}{3} \cdot 0,\overbrace{999\,999\,999\,9}^{10 \text{ db}}\overbrace{49}^{9 \text{ db}}\overbrace{999\,999\,999\,75}^{9 \text{ db}} > 0,\underbrace{333\,333\,333\,316}_{10 \text{ db}}\underbrace{666\,666\,666}_{9 \text{ db}}5 \end{aligned}$$

Míg a felső korláté

$$\frac{1}{3}(1 - 5 \cdot 10^{-11}) = \frac{1}{3} \cdot 0,\overbrace{999\,999\,999\,95}^{10 \text{ db}} < 0,\underbrace{333\,333\,333\,316}_{10 \text{ db}}\underbrace{666\,666\,666}_{9 \text{ db}}7.$$

Ezek szerint $\sqrt{A}$ értéke húsz tizedes jegyre

$$0,333\,333\,333\,316\,666\,666\,67.$$