Jelöljük az a, b számok legnagyobb közös osztóját d-vel, és legyen

$$A = \frac{a}{b}, \qquad B = \frac{b}{a}, \qquad S = A^2 + B^2, \qquad T = A^2 - B^2.$$

Jelöljük még S és T legnagyobb közös osztóját D-vel. Az $(a^2+b^2)/(a^2-b^2)$ tört nyilván egyszerűsíthető d^2-tel, így kapjuk az S/T alakot. Ha $D > 1$, ez tovább egyszerűsíthető D-vel, de mással nem, hiszen D definíció szerint S és T legnagyobb közös osztója. Így a feladat állítása azzal ekvivalens, hogy a D-vel való egyszerűsítés után a nevező nem $+1$ vagy -1 lesz, azaz hogy

$$D < |T|. \tag{1}$$

Az a és b egészek nyilván csak különbözőek lehetnek, így A és B is különböző egészek. Ha $A > B$, akkor

$$T = A^2 - B^2 = \big(2B + (A-B)\big)(A-B) \geqq 3 \cdot 1,$$

hiszen $A - B$ értéke is, és B értéke is legalább 1. Ha pedig $B > A$, akkor

$$|T| = B^2 - A^2 = \big(2A + (B-A)\big)(B-A) \geqq 3 \cdot 1,$$

így (1) igazolásához elegendő belátni, hogy

$$D \leqq 2. \tag{2}$$

Mivel $S = T + 2B^2$, ha volna S-nek és T-nek 2-nél nagyobb közös p prímosztója, azzal B^2 és így B is osztható volna. Ámde ekkor $A^2 = T + B^2$ miatt A^2 és A is osztható volna p-vel, ami nem lehet, mert A és B legnagyobb közös osztója 1. Emiatt D csak 2^k alakú lehet, és azt kell megmutatnunk, hogy $k \leqq 1$.

Mivel A és B legnagyobb közös osztója 1, nem lehet mindkettő páros. Ha egyik páros, a másik páratlan, S és T páratlanok, tehát $D = 1$. Ha A és B páratlanok, akkor 4-gyel osztva 1 maradékot adnak, hiszen

$$(2n+1)^2 = 4(n^2+n) + 1.$$

Tehát ebben az esetben S 4-gyel osztva 2 maradékot ad, és T osztható 4-gyel. Emiatt $D = 2$, hiszen $S/2$ már páratlan. Ezzel a feladat állítását beláttuk.