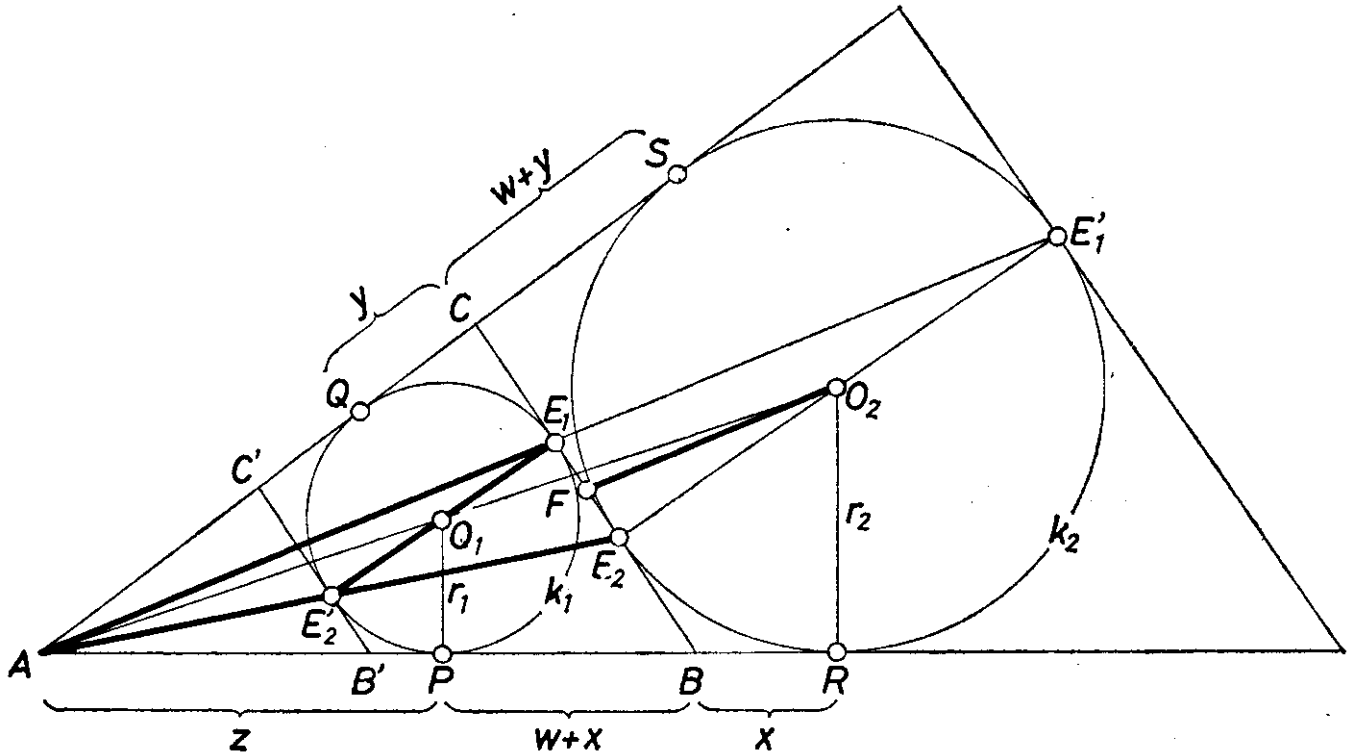


Jelöljük az ABC háromszög beírt körét k_1 -gyel, a BC oldalához hozzáírt körét k_2 -vel, a körök sugarait pedig r_1 -gyel, illetve r_2 -vel.



Először azt bizonyítjuk, hogy az AE_2 és E_1O_1 egyenesek a beírt körön metszik egymást. Az A , O_1 , O_2 pontok egy egyenesen, a BAC szögfelezőjén vannak. Az A pont a k_1 , k_2 körök külső hasonlósági pontja. Az A középpontú, $\lambda = r_1/r_2$ arányú kicsinyítéssel O_2 az O_1 -be, a k_2 kör a k_1 körbe, a k_2 kör E_2 -beli érintője, BC , a k_1 kör E'_2 -beli érintőjébe, $B'C'$ -be megy át (1. ábra). Mivel $B'C'$ párhuzamos BC -vel, így a beírt kört e két egyenes egy átmérő két végpontjában érinti, ezért az E_1 , O_1 , E'_2 pontok egy egyenesen vannak. Az A , E_2 , E'_2 is egy egyenesen vannak, mivel az A középpontú kicsinyítésben E'_2 az E_2 megfelelője. A két egyenes közös pontja, E'_2 tehát illeszkedik a k_1 körre.

Ezek után rátérünk annak bizonyítására, hogy az FO_2 és E_1A egyenesek párhuzamosak. Először is azt látjuk be, hogy $CE_1 = BE_2$. A k_1 és k_2 körök közös külső érintőin levő érintési pontok legyenek P , Q , R , S . Külső pontból a körhöz húzott érintőszakaszok egyenlősége folytán $BE_2 = BR = x$, $CE_1 = CQ = y$, $AQ = AP = z$, továbbá $BE_1 = BP = w + x$ és $CE_2 = CS = w + y$, ahol $w = E_1E_2$. Végül $AR = AS$ alapján $z + w + 2x = z + w + 2y$, ahonnan $x = y$ adódik. Így F nemcsak a BC , hanem az E_1E_2 szakasznak is felezőpontja. Legyen E'_1 az a pont, amelynek képe az előbbi A középpontú kicsinyítésben E_1 . Az $E'_1E_1E_2$ háromszögben FO_2 középvonal, mivel E'_1E_2 a k_2 kör átmérője. FO_2 tehát párhuzamos $E_1E'_1$ -vel, így AE_1 -gyel is.

Egyenlő szárú háromszög esetén, ha $AB = AC$, akkor az FO_2 , E_1A , AE_2 , E_1O_1 egyenesek egybeesnek, mivel ekkor a BAC szögfelezője merőlegesen felezi a BC oldalt. Az állítás erre az esetre módosításra szorul, mivel egybeeső egyenesekre nem mondjuk sem azt, hogy párhuzamosak, sem azt, hogy metszik egymást.

Helyei Judit (Pécs, Bánki Donát u.-i Ált. Isk., 8. o. t.)
dolgozata alapján