Az egyenlet mindkét oldalát köbre emelve, majd felhasználva az $(a+b)^3 = a^3+b^3+3ab(a+b)$ azonosságot, kapjuk, hogy

$$\sqrt[3]{x(1-x)}\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{1-x}\right) = \frac{19}{24}. \tag{2}$$

Itt az eredeti egyenlet szerint $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{1-x} = \frac{3}{2}$, ezt (2)-be helyettesítve kapjuk, hogy

$$\frac{3}{2}\sqrt[3]{x(1-x)} = \frac{19}{24}. \tag{3}$$

Ebből újabb köbreemelés és rendezés után az

$$x^2 - x + \left(\frac{19}{36}\right)^3 = 0 \tag{4}$$

egyenletet kapjuk. Ennek gyökei:

$$x_1 = \frac{1}{2} + \frac{31\sqrt{5}}{216} \approx 0,8209,$$
$$x_2 = \frac{1}{2} - \frac{31\sqrt{5}}{216} \approx 0,1791.$$

Az világos, hogy (1) gyökei (4)-nek is gyökei, tehát ha (1)-nek van gyöke, akkor az csak x_1 vagy x_2 lehet – esetleg mindkettő. Az eddigiek alapján azonban még nem állíthatjuk, hogy x_1 és x_2 (1)-nek is gyökei, hisz a megoldás során (1)-et helyettesítettük (2)-be. Így abból, hogy például x_1 gyöke (4)-nek, és így a vele ekvivalens (3)-nak, épp annak felhasználásával következne, hogy x_1 (2)-nek, és így (1)-nek is gyöke, ha már tudnánk, hogy $\sqrt[3]{x_1}+\sqrt[3]{1-x_1} = \frac{3}{2}$. A megfordítás így csak önmagából következne, x_1 akkor gyöke (1)-nek, ha gyöke (1)-nek. A körbezárult.

Felismerve, hogy $x_1 = \left(\frac{9+\sqrt{5}}{12}\right)^3$, és $x_2 = 1 - x_1 = \left(\frac{9-\sqrt{5}}{12}\right)^3$ a gyökök ellenőrzése behelyettesítéssel elvégezhető:

$$\sqrt[3]{x_1}+\sqrt[3]{1-x_1} = \sqrt[3]{x_2}+\sqrt[3]{1-x_2} = \sqrt[3]{x_1}+\sqrt[3]{x_2} = \frac{9+\sqrt{5}}{12}+\frac{9-\sqrt{5}}{12} = \frac{3}{2}.$$

Az egyenlet gyökei tehát: $\frac{1}{2}+\frac{31\sqrt{5}}{216}$ és $\frac{1}{2}-\frac{31\sqrt{5}}{216}$.

Megjegyzések. 1. A feladatra nagyon sok hiányos megoldás érkezett. Majdnem minden megoldó ekvivalens átalakításnak vélte $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{1-x}$ „visszahelyettesítését”. Egy másik gyakori hiba a gyökök ellenőrzésekor fordult elő. Többen közelítő értékkel számoltak, de eredményük hiába közelítette a $\frac{3}{2}$-t akár több értékes jegyre is, ebből elvileg semmi nem következik.

2. Az alábbi példa mutatja, hogy a „kritikus” átalakítás valóban nem feltétlenül ekvivalens. Nem olyan tévedésről van tehát szó, amely csak elvben vezethet hibához! Ha az

$$\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{1-x} = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}} \tag{1'}$$

egyenletből indulunk ki, akkor a megoldásban követett módszer most a

$$4x^2 - 4x + 1 = 0 \tag{4'}$$

másodfokú egyenletre vezet. Ennek $x = \frac{1}{2}$ gyöke, ámde ez láthatóan nem gyöke (1')-nek, (már csak azért sem, mert annak nincs gyöke). (**F. T.**)