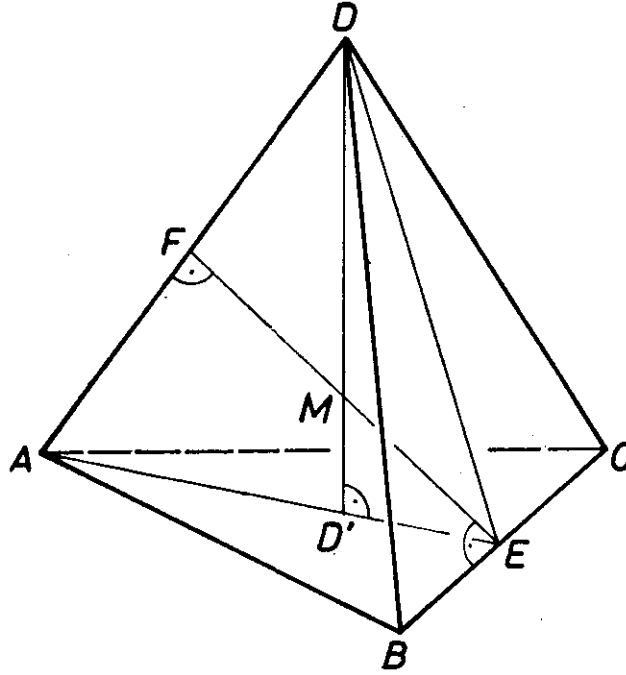




Jelöljük a tetraéder csúcsait A , B , C és D -vel. Mivel a tetraéder szabályos, bármely magasságvonala a szemközti szabályos háromszöget a körülírt körének középpontjában metszi. A magasságvonaltól 120° -kal elforgatva a tetraédert, önmagába megy át. Ez a forgatás a tetraéder köré, a tetraéderbe írt gömböt, valamint az érintő gömböt is önmagába viszi át, emiatt mindhárom gömbnek a középpontja a tetraéder magasságpontja, M .

Jelöljük a D csúcsnak az ABC síkra való merőleges vetületét D' -vel. A DD' magasságvonalt tartalmazza a tetraéder M magasságpontját és MD' a tetraéderbe írt gömb sugarával egyenlő. Érintse az érintő gömb az AD élt F -ben, a BC élt E -ben. Így $MF \perp AD$ és $ME \perp BC$, továbbá $ME = MF$ és nyilván F felezi AD -t, E felezi BC -t, hiszen $MD = MA = MC = MB$ a tetraéder köré írt gömb sugarával egyenlő. A DEA háromszög egyenlő szárú, ($ED = EA$) és MF merőlegesen felezi AD -t, így kell, hogy átmenjen a szemközti csúcson, E -n, azaz E , M és F egy egyenesbe esik. Ebből következik, hogy az EMD' és DMF háromszögek M csúcsnál levő szögei csúcsszögek, tehát egyenlők, s mivel $MD'E$ és MFD szögük derékszög, így hasonlóak és megfelelő oldalakra

$$\frac{EM}{MD'} = \frac{DM}{MF}, \quad ME = MF \quad \text{miatt} \quad EM^2 = MD' \cdot DM,$$

amint azt igazolni akartuk.