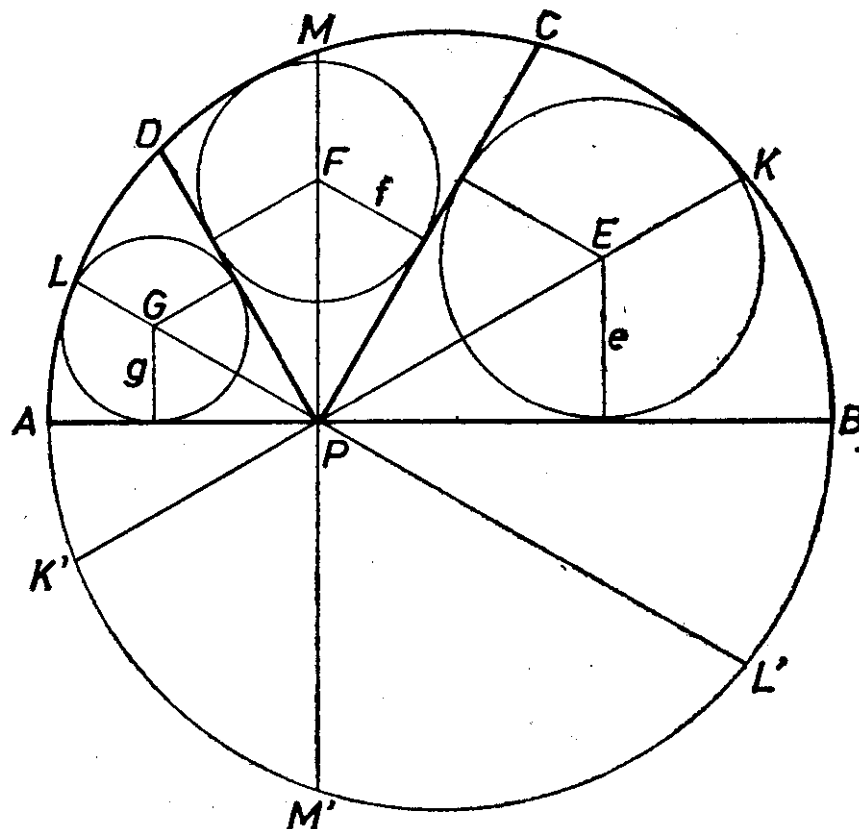




Jelöljük a  $PBC$ ,  $PCD$ ,  $PDA$  idomokba beírt körök középpontjait rendre  $E$ -vel,  $F$ -fel,  $G$ -vel, sugaraikat  $e$ -vel,  $f$ -fel,  $g$ -vel. Mivel a  $PE$ ,  $PF$ ,  $PG$  félegyenesek mind  $60^\circ$ -os szögek felezői,

$$(1) \quad PE = 2e, \quad PF = 2f, \quad PG = 2g.$$

Jelöljük ezeknek a félegyenéseknek az eredeti körrel alkotott metszéspontjait rendre  $K$ -val,  $M$ -mel,  $L$ -lel. Ezek nem lehetnek az egyes idomokba írt körök belső pontjai, így

$$(2) \quad EK \geq e, \quad FM \geq f, \quad GL \geq g,$$

amit (1)-gyel összevetve kapjuk, hogy

$$PK + PM + PL \geq 3(e + f + g).$$

Elegendő tehát belátni, hogy

$$PK + PM + PL \leq 3R.$$

Jelöljük a  $PK$ ,  $PM$ ,  $PL$  egyeneseknek az eredeti körrel alkotott második metszéspontjait rendre  $K'$ -vel,  $M'$ -vel,  $L'$ -vel. Akkor  $L$  és  $K'$ ,  $M$  és  $M'$ ,  $K$  és  $L'$  az  $AB$ -re szimmetrikusan helyezkednek el, emiatt

$$2(PK + PM + PL) = (PK + PL') + (PM + PM') + (PL + PK').$$

Ez utóbbi összeg viszont nem más, mint a  $KK'$ ,  $MM'$ ,  $LL'$  húrok összhossza, ami nyilvánvalóan legfeljebb  $6R$ . Egyenlő csak akkor lehet vele, ha a húrok mindegyike átmérő, vagyis  $P$  az  $AB$  szakasz felezőpontja. Mivel ekkor (2)-ben is az egyenlőség érvényes, ebben (és csakis ebben) az esetben  $e + f + g = R$ , különben  $e + f + g < R$ , amint azt bizonyítani kellett.