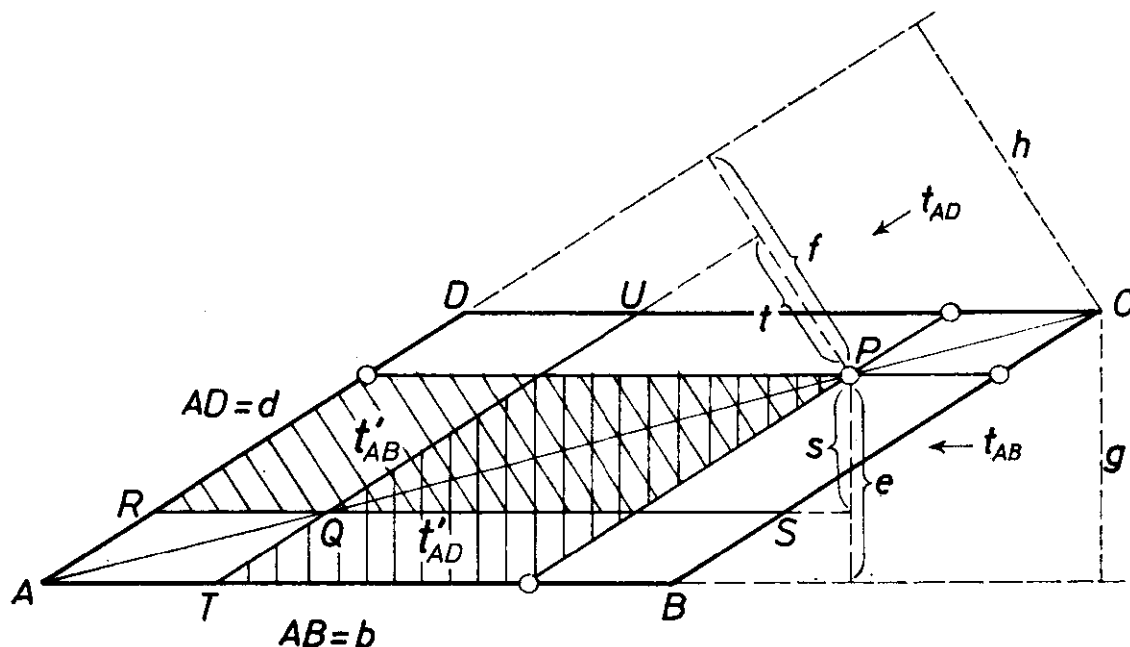


I. megoldás. Jelöljük az AC átlón először felvett pontot Q -val, és húzzunk P -n át is a paralelogramma oldalaival párhuzamos egyeneseket. Az AB -vel párhuzamos, P -n, illetve Q -n átmenő egyenesek az AD , BC egyenesekkel együtt egy paralelogrammát fognak közre, jelöljük ennek a területét t_{AB} -vel.



Ha mondjuk RS , TU közül RS párhuzamos AB -vel, akkor t_{AB} a PRS háromszög területének a kétszerese, hiszen egyenlő RS hosszának és P -nek az RS -től mért távolságának a szorzatával. Legyen még t_{AD} a P -n, Q -n átmenő, AD -vel párhuzamos egyenesek, és az AB , CD egyenesek által közrefogott paralelogramma területe. $RS \parallel AB$ esetén t_{AD} a PTU háromszög területének a kétszeresével egyenlő. Így elegendő belátni, hogy t_{AB} és t_{AD} egyenlőek.

Mivel most már P és Q szerepe megegyezik, feltehetjük, hogy közülük mondjuk Q van A -hoz közelebb. Tekintsük először azt a paralelogrammát, amelynek A és P csúcsa, és oldalai rendre párhuzamosak (vagy azonosak) az eredeti paralelogramma megfelelő oldalaival. Jelöljük a vizsgált sávok ebbe eső darabjainak a területét t'_{AB} -vel, illetve t'_{AD} -vel, ezek egyenlősége ismeretes. Ugyancsak tudjuk azt is, hogy a sávoknak a QC átlójú paralelogrammába eső darabjainak t''_{AB} , t''_{AD} területe egyenlő. Mivel a $(t'_{AB} + t''_{AB})$ összeg ugyanannak a PQ átlójú paralelogrammának a területével haladja meg t_{AB} -t, mint amivel $(t'_{AD} + t''_{AD})$ a t_{AD} értékét meghaladja, ezekből már következik t_{AB} és t_{AD} egyenlősége.

II. megoldás. Legyen továbbra is RS , TU közül RS párhuzamos AB -vel, és jelöljük az AB , AD szakaszok hosszát b -vel, d -vel, a PRS , PTU háromszögek P -hez tartozó magasságát s -sel, t -vel. Azt kell belátnunk, hogy $bs = dt$, vagyis $s : t = d : b$. Jelöljük P -nek az AB , AD egyenesektől mért távolságát e -vel, f -fel. A párhuzamos szelők tétele szerint $e : s = AP : PQ$ (ahol Q most is RS és TU metszéspontját jelöli), és $f : t = AP : AQ$, tehát $e : s = f : t$, vagyis $s : t = e : f$. Jelöljük végül C -nek az AB , AD egyenesektől mért távolságát g -vel, h -val. Ismét a párhuzamos szelők tétele alapján $e : g = AP : AC$, $f : h = AP : AC$, tehát $e : f = g : h$.

Ezek szerint azt kell belátni, hogy $g : h = d : b$, vagyis $bg = dh$. Ez viszont nyilvánvaló, hiszen mindkettő az $ABCD$ paralelogramma területével egyenlő.