

Bizonyítsuk be, hogy ha $|x| < 1$ és $|y| < 1$, akkor

$$(1) \quad |x - y| < |1 - xy|.$$

I. megoldás. A négyzetfüggvény szigorúan monoton növekvő a nemnegatív számok halmazán, így elég belátni, hogy

$$(2) \quad (|x - y|)^2 < (|1 - xy|)^2.$$

Felhasználva, hogy tetszőleges t számra $|t|^2 = t^2$, (2)-ben a négyzetre emeléseket elvégezve; és az egyenlőtlenséget rendezve kapjuk, hogy

$$0 < (1 - x^2)(1 - y^2).$$

Itt $|x| < 1$ és $|y| < 1$ miatt a jobb oldalon álló szorzat mindkét tényezője valóban pozitív.

II. megoldás. (1)-ben x és y szerepét felcserélve ugyanazt az egyenlőtlenséget kapjuk, így feltehetjük, hogy $x \geq y$. Ekkor $|x - y| = x - y$, továbbá $xy < 1$ miatt $|1 - xy| = 1 - xy$. Ezek alapján a bizonyítandó állítás átrendezések után az

$$x(1 + y) < 1 + y$$

egyenlőtlenség. Ez nyilvánvalóan igaz, hiszen $1 + y > 0$ és $x < 1$. **(R. Zs.)**