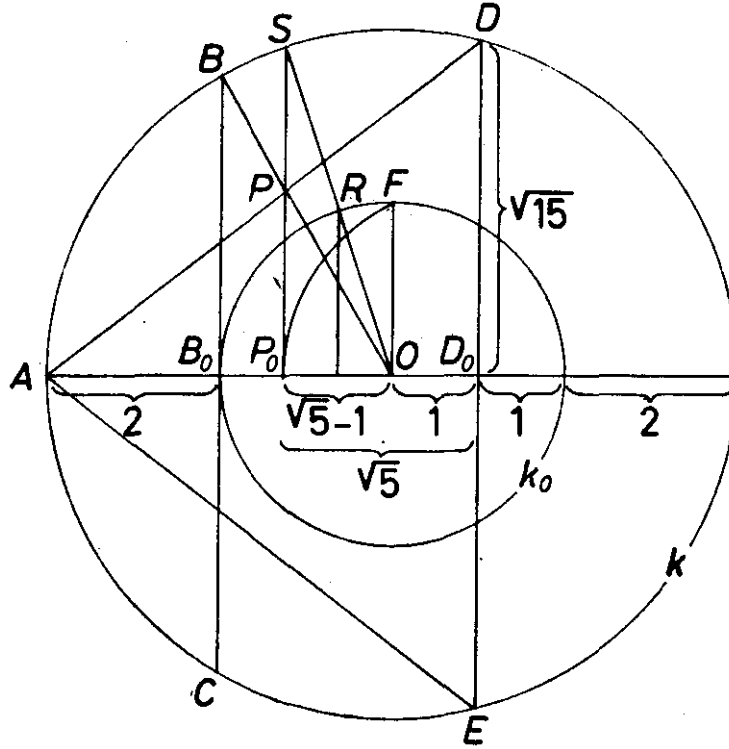


Növeljük négyszeresére a kör sugarát, hogy ne kelljen törtekkel számolnunk, és jelöljük B -nek, D -nek, P -nek az AO egyenesen levő vetületét B_0 -lal, D_0 -lal, P_0 -lal.



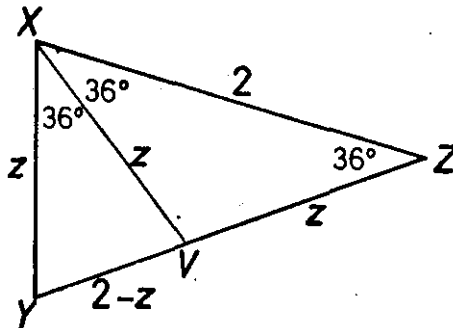
Először megmutatjuk, hogy $P_0D_0 = \sqrt{5}$. Pitagorász tétele alapján ugyanis $DD_0 = \sqrt{15}$, és ha a P , P_0 pontokat eleve $P_0D_0 = \sqrt{5}$ alapján jelöljük ki, akkor

$$PP_0 = DD_0 \frac{AP_0}{AD_0} = \sqrt{15} \frac{5 - \sqrt{5}}{5} = \sqrt{3}(\sqrt{5} - 1),$$

vagyis $PP_0 = \sqrt{3}OP_0$, és emiatt az így kijelölt P pont mellett OP valóban átmegy B -n.

Rajzoljuk még meg az O középpontú 2 sugarú k_0 kört, és legyen ennek OF az egyik OA -ra merőleges sugara. Mivel D_0F hossza is $\sqrt{5}$, a P_0 pont a k_0 körbe írható szabályos öt- és tízsög szokásos megszerkesztésének is eleme. D_0 ugyanis felezi k_0 rajta átmenő sugarát, és P_0 a $D_0F = \sqrt{5}$ hosszúságú szakasz leforgatásából származik. Emiatt OP_0 a k_0 -ba írható szabályos tízsög oldala, vagyis ha az OP_0 szakasz felező merőlegese k_0 -t R -ben metszi, akkor az OP_0R egyenlő szárú háromszög alapján fekvő szögei 72° -osak. Ezzel beláttuk, hogy PP_0 a k kört a k -ba írható szabályos ötszög A -val szomszédos S csúcsában metszi, hiszen S -t az OR sugar is kimetszi, k -ból.

Megjegyzés. Legyen az XYZ háromszögben $XZ = YZ = 2$ és $\angle XYZ = 72^\circ$. Messe az X -beli szögfelező YZ -t V -ben.



Akkor XYZ és VYX hasonló háromszögek, és $XY = XV = VZ$. Jelöljük ez utóbbit z -vel, akkor az előbbi hasonlóság miatt $(2 - z) : z = z : 2$, vagyis $z^2 + 2z - 4 = 0$, $z = -1 \pm \sqrt{5}$, tehát $z = \sqrt{5} - 1$. Tehát a szokásos tízsögszerkesztésre való hivatkozás nélkül is látható, hogy OP_0R a szabályos tízsög egy szelete.