

Jelöljük a fiúk számát  $F$ -fel, a lányokét  $L$ -lel. A fiúk egymás közt  $F(F-1)$  játszmát játszottak, tehát egymástól összesen  $\frac{F(F-1)}{2}$  pontot szereztek. Mivel mindenki ugyanannyi pontot szerzett a fiúktól, mint a lányoktól, együttesen ugyanennyi pontot szereztek a lányoktól is. Hasonló gondolatmenettel következik, hogy a lányok  $\frac{L(L-1)}{2}$  pontot szereztek a fiúktól. A fiú-lány mérkőzések száma egyenlő az egymástól szerzett pontok összegével:

$$L \cdot F = \frac{F(F-1)}{2} + \frac{L(L-1)}{2}.$$

Ebből az egyenletből átrendezéssel az

$$(*) \quad L + F = (L - F)^2$$

egyenlőség adódik, ami igazolja az állítást: a résztvevők száma négyzetszám.

*Megjegyzés.* Vizsgáljuk meg, vajon minden négyzetszám fellép-e mint a résztvevők lehetséges száma? Pusztán a (\*) egyenlőség egy négyzetszámot sem zár ki. Ugyanis ha valamely  $k$  természetes számra a lányok száma  $L = 1/2(k^2 - k)$ , a fiúk pedig  $F = 1/2(k^2 + k)$  (az  $L$  és  $F$  mindig egész szám), akkor a (\*) egyenlőség teljesül és  $L + F = k^2$ . (Ha  $L + F$  értéke rögzített, akkor a fiúk és lányok száma a szimmetriától eltekintve más nem is lehet.)

Kérdés, hogy ennyi résztvevő mellett a játszmák végeredménye alakulhat-e úgy, hogy mindenki a pontjainak felét szerezzék a fiúk elleni játszmákból? Igen, ez lehetséges, például a következő esetben. Állítsuk a lányokat körbe, és bármely  $(k-1)$  szomszédos lányt pontosan egy fiú győzzön le, és a többiekkel döntetlenül mérkőzzön. Így minden lány éppen  $(k+1)$  fiútól kap ki és minden fiú  $(k-1)$  lányt győz le.

Érdekes megjegyezni, ha mindössze egy játékosra nem igaz, hogy pontjainak felét szerezte fiúktól, akkor a résztvevők száma tetszőleges lehet. Ugyanis ha páros sokan voltak, fele fiú, fele lány, akkor ha minden játék döntetlen, kivéve egy fiút, aki minden fiú ellen veszített és nyert minden lány ellen, akkor épp olyan eset áll elő, melyben ezen a fiún kívül mindenki a pontszámának felét szerezte fiúktól. Ha páratlan számú játékos volt, akkor megfelelő konstrukciót kapunk az előzőt kiegészítve egy olyan játékosal, aki mindenkit megvert.