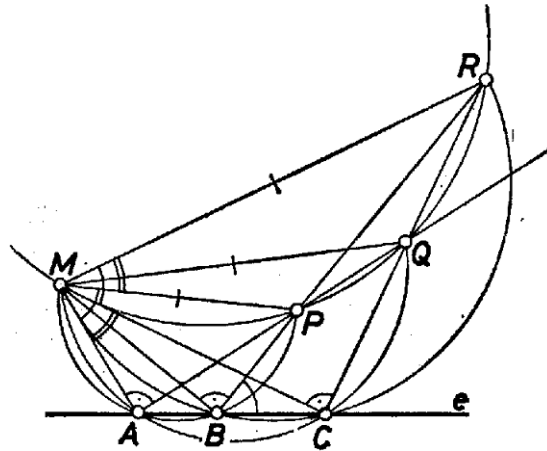


Mivel az A , B , C pontok közül egyiknek sincs kitüntetett szerepe, feltehetjük, hogy B az A és C között van. Az állítást 2 esetben kell külön megvizsgálni: I. ha az M pontnak az A , B , C pontokat tartalmazó e egyenesre való vetülete a pontokat nem választja szét, II. ha M vetülete szétválasztja a pontokat, pl. ha A és B közé esik. Bármely más esetet az A , B , C pontok átbetűzésével megkaphatunk.

Mindkét esetben igaz az, hogy $AMPB$, $BMCR$, $AMCQ$ pontok egy-egy körön, rendre az MP , MR és MQ szakaszok fölé írt Thalész körön vannak, hiszen $MAP \sphericalangle$, $MBP \sphericalangle$, $MCR \sphericalangle$, $MBR \sphericalangle$, $MAQ \sphericalangle$ és $MCQ \sphericalangle$ mindegyike derékszög. A bizonyításban ezeket rendre felhasználjuk.

Ezután nézzük a bizonyítást párhuzamosan a két esetre.



I. Az $AMPB$ négyszögben az A és B az MP átmérő ugyanazon oldalára esik, $AMP \sphericalangle = PBC \sphericalangle = RBC \sphericalangle = RMC \sphericalangle$, a $BMCR$ négyszögből.

Az $AMP \sphericalangle$ -ből és a vele egyenlő $RM C \sphericalangle$ -ből vonjuk le a $CM P \sphericalangle$ -t, ami mindkettőnek része, kapjuk, hogy a különségük is egyenlő

$$RMC \sphericalangle - PMC \sphericalangle = RMP \sphericalangle,$$

ill.

$$AMP \sphericalangle - PMC \sphericalangle = AMC \sphericalangle,$$

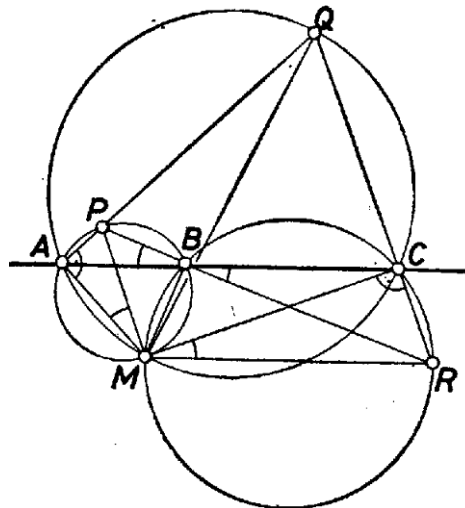
azaz

$$RMP \sphericalangle = AMC \sphericalangle.$$

Végül az $AMCQ$ négyszögből

$$AMC \sphericalangle = AQC \sphericalangle = PQC \sphericalangle.$$

$PQC \sphericalangle$ -t a $PQR \sphericalangle$ 180° -ra egészíti ki, de akkor $PQC \sphericalangle = PMR \sphericalangle$ miatt $PMR \sphericalangle + PQR \sphericalangle = 180^\circ$, ami éppen azt jelenti, hogy a $PQRM$ négyszög húrnégyszög.



II. Most PM az A és B pontokat szétválasztja, így

$$AMP \sphericalangle = ABP \sphericalangle.$$

Egyrészt

$$RBC\angle = ABP\angle = AMP\angle,$$

másrészt a $BMCR$ négyszögből

$$RBC\angle = RMC\angle,$$

és mindkettőhöz PMC -t adva

$$AMP\angle + PMC\angle = AMC\angle,$$

$$RMC\angle + PMC\angle = RMP\angle,$$

s mivel az összeadandók egyenlők, ezért az összegük is egyenlő, azaz

$$RMP\angle = AMC\angle.$$

Továbbá

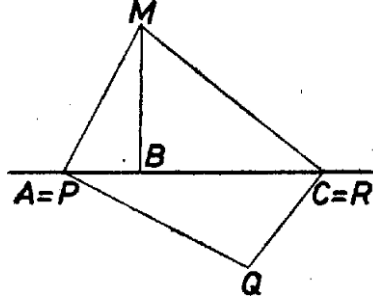
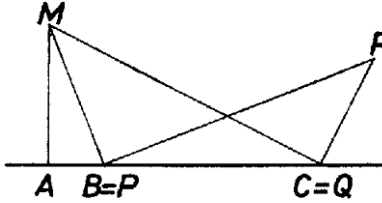
$$PMR\angle = AMC\angle = 180^\circ - AQC\angle = 180^\circ - PQC\angle,$$

amiből

$$PMR\angle + PQR\angle = 180^\circ,$$

mint előbb.

Speciális esetként tárgyalhatjuk azokat az eseteket, amikor M vetülete egybeesik valamelyik ponttal.



Ha $M' = A$, akkor nyilván $B = P$ és $C = Q$. Az $MBR\angle = MCR\angle = 90^\circ$ miatt P és Q rajta van az MR szakasz Thalész körén, azaz négyszögünk húrnégyszög. Ha M vetülete B -vel esik egybe, akkor $A = P$ és $C = R$ miatt P , M , Q , R ugyancsak egy körön vannak.