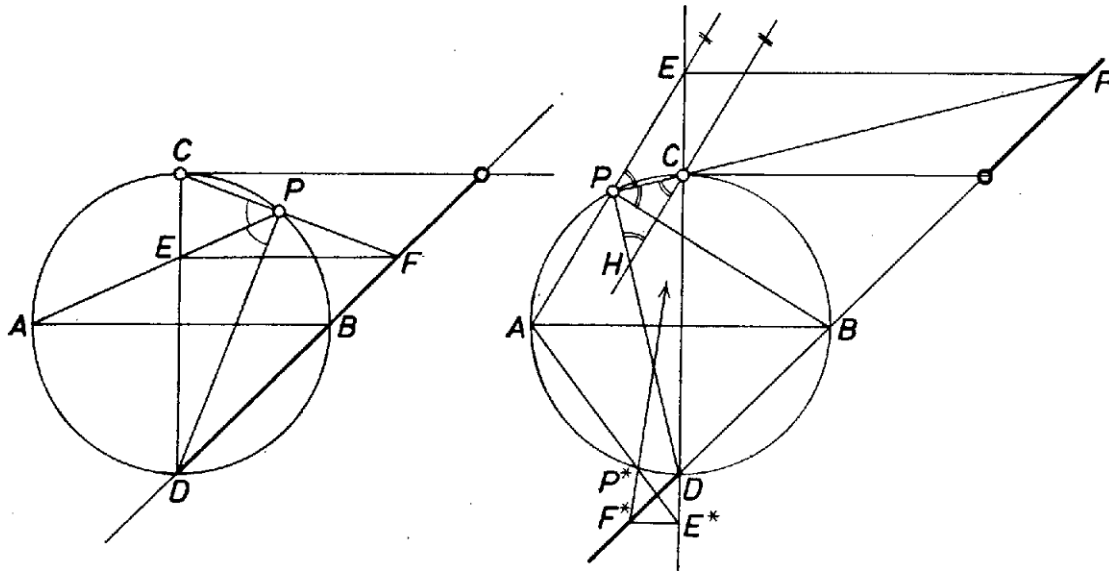


Először válasszuk  $P$ -t a  $CBD$  félköríven. A  $CPD$  háromszög nyilván derékszögű és hasonló az ugyancsak derékszögű  $CEF$  háromszöghöz, hiszen egy hegyes szögük közös. Mivel  $P$  és  $A$  a  $CD$  átmérő különböző oldalán van, a  $PA$ ,  $CD$  húrok metszik egymást, vagy  $P$  a  $C$ ,  $D$  pontok egyikével azonos. Ez utóbbi esetet külön fogjuk vizsgálni. A  $PA$  egyenes tehát a  $CPD$  háromszög belsejében halad, s mivel  $A$  a  $CD$  ív felezőpontja,  $\angle CPA = \angle DPA$ , azaz  $PA$  belső szögfelezője a  $CPD$  háromszögnek. Ekkor felhasználva a szögfelező osztásarányára vonatkozó tételt, mely szerint a szögfelező a szemközti oldalt a közrezáró oldalak arányában osztja, kapjuk, hogy

$$(1) \quad \frac{EF}{CE} = \frac{PD}{PC} = \frac{ED}{CE},$$

ahol az első egyenlőség a hasonló háromszögek megfelelő oldalaira vonatkozik.



Innen adódik, hogy  $EF = ED$ , azaz  $EFD$  egyenlő szárú derékszögű háromszög. Az  $F$  pontok tehát azon az egyenesen sorakoznak, mely a  $CD$  átmérővel  $45^\circ$ -os szöget zár be, ez pedig a  $BD$  egyenes. Valóban  $D$  is, és  $B$  is pontja a mértani helynek. Hiszen ha  $P = D$ , akkor  $PA$  és  $DC$  metszéspontja  $E$ , valamint az  $F$  pont is azonos  $D$ -vel. Ha  $P = B$ , akkor  $E$  a  $k$  középpontja és  $F$  megegyezik  $B$ -vel.

Ha viszont  $P$  a  $C$ -be esik, akkor a  $CP$  egyenes nincs meghatározva, így nem jön létre  $F$  pont. A mértani helyhez tehát nem tartozik hozzá a  $BD$  egyenesnek az a pontja, melyet belőle a  $C = E$ -n keresztül az  $AB$ -vel párhuzamos egyenes metsz ki. Mivel  $P$ -t most a  $CBD$  köríven vizsgáltuk, mértani helyként a  $BD$  egyenesnek csak egy részét kaptuk.

Most vizsgáljuk azokat a  $P$  pontokat, melyek a  $CAD$  íven vannak. A  $CPD$  háromszög most is derékszögű és hasonló  $CEF$ -hez. Az (1) aránypár első egyenlősége így most is teljesül. Könnyű belátni, hogy a  $PA$  egyenes most külső szögfelezője a  $CPD$  háromszögnek, hiszen  $PB$  a belső szögfelező és  $\angle APB = 90^\circ$ , Thalész tétele miatt. Húzzunk párhuzamost a  $C$  ponton keresztül az  $AP$  szögfelezővel s jelöljük a  $PD$ -vel való metszéspontját  $H$ -val. Az  $\angle EPC = \angle PCH = \angle PHC$  miatt  $PH = PC$ -vel, és a  $PDE$  szög száraitra felírható a következő aránypár:

$$\frac{PD}{PH} = \frac{PD}{PC} = \frac{ED}{EC} \quad \text{és a hasonlóságból} \quad \frac{PD}{PC} = \frac{EF}{EC}$$

így (1) most is teljesül. Emiatt az  $F$  pontok most is a  $BD$  egyenesen vannak. Mivel most  $P$  és  $A$  a  $CD$  egyenes ugyanazon oldalán van, a  $CD$  és  $AP$  húrok nem metszik egymást, az  $AP$  egyenes  $C$ -n, ill.  $D$ -n túl metszi a  $CD$ -t. Az  $E$  és  $F$  pontok tehát annál messzebb kerülnek  $C$ -től, ill.  $D$ -től, minél közelebb van  $P$  az  $A$ -hoz. Ha  $P$  egybeesik  $A$ -val, akkor a  $PA$  egyenes nem határozható meg, s így nem tartozik hozzá  $F$  pont.

A mértani hely tehát egy pontja kivételével a  $BD$  egyenes.

Be kell még látnunk, hogy a  $BD$  egyenes minden pontja (azt az egyet kivéve) hozzátartozik a mértani helyhez. Vegyünk fel a  $BD$  egyenesen egy tetszőleges  $F$  pontot. Húzzunk  $F$ -en keresztül párhuzamost  $AB$ -vel, ez biztosan metszi  $CD$ -t. Ez a metszéspont lesz az  $E$  pont.  $E$ -t összekötve  $A$ -val, kapunk a körön egy  $P$  pontot. Ennek a  $P$  pontnak megfelelő mértani hely pont csak az  $F$  lehet, hiszen ez az egyetlen olyan pont, amely az  $E$ -n át húzott párhuzamoson is és a  $BD$  egyenesen is rajta van.