

I. megoldás. Ha $x \geq 0$ és $y \geq 0$, akkor (1)-ből $x \leq 1$ és $y \leq 1$ következik, (2)-ből pedig $x \geq 1$. Így csak $x = 1$ teljesülhet. Ezt (2)-be helyettesítve $y = 0$ adódik. Behelyettesítve látható, hogy ez a számpár (1)-nek is megoldása. Tehát az egyenletrendszer megoldása nem negatív számok körében: $x = 1$, $y = 0$.

Ha $x + y > 0$, akkor $(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$ alapján

$$(x + y)^2 = \frac{(x + y)^3}{x + y} = \frac{x^3 + y^3}{x + y} + 3xy.$$

Ha $x + y > 1$, akkor a bal oldal nagyobb 1-nél, a jobb oldalon álló tört értéke pedig nő, ha a nevezőt 1-re csökkentjük. Azt kapjuk tehát, hogy $1 < x^3 + y^3 + 3xy$, ami (1) miatt lehetetlen. Hasonló ellentmondásra vezet az $x + y < 1$ feltevés is, így (1)-ből az $x + y > 0$ feltétel mellett $x + y = 1$ következik. Ezt (2)-be helyettesítve kapjuk, hogy

$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y) = x - y = 1.$$

Az egyenletrendszer tehát $x + y > 0$ feltétel mellett az

$$x + y = 1, \quad x - y = 1$$

egyenletrendszerrel ekvivalens és ennek továbbra is csak $x = 1$, $y = 0$ a gyöke.

II. megoldás. Megmutatjuk, hogy az egyenletrendszernek akkor sincs más megoldása, ha x -ről és y -ről nem teszünk fel semmit.

Az első egyenlet az $x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y)$ és az $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ azonosságok felhasználásával szorzattá alakítható:

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 - 1 + 3xy &= (x + y)^3 - 1 - 3xy(x + y - 1) = \\ &= (x + y - 1)((x + y)^2 + (x + y) + 1) - \\ &\quad - 3xy(x + y - 1) = \\ &= (x + y - 1)(x^2 + y^2 - xy + x + y + 1). \end{aligned}$$

A második tényező négyzetek összegére bontható:

$$x^2 + y^2 - xy + x + y + 1 = \frac{1}{2}[(x + 1)^2 + (y + 1)^2 + (x - y)^2].$$

Az (1) egyenlet tehát ekvivalens az

$$(1^*) \quad (x + y - 1)[(x + 1)^2 + (y + 1)^2 + (x - y)^2] = 0$$

egyenlettel. Innen vagy $x + y = 1$, vagy $x = y = -1$.

A második eset (2) miatt nem megoldás, az első esetben pedig (2)-ből az $x = 1$ és $y = 0$ gyököt kapjuk.