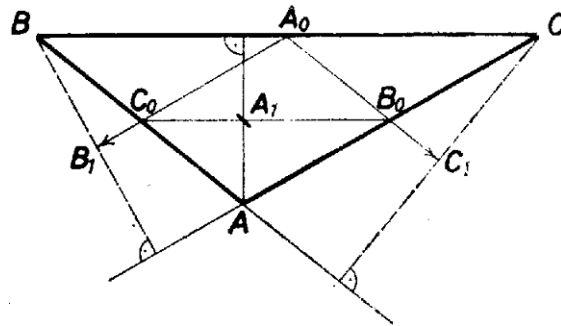


Ha egy háromszög valamelyik csúcsát összekötjük a szemközti oldal egyenesének valamelyik pontjával, a keletkező szakasz felezőpontja a választott oldallal párhuzamos középvonalon van. Mivel hegyesszögű háromszögben mindhárom magasságszakasz a háromszög belsejében van, felezőpontjaik rendre az oldalfelező pontok által meghatározott háromszög oldalszakaszain vannak. Emiatt ha ezek a pontok egy egyenesen vannak, a háromszög biztosan nem hegyesszögű.



Tompaszögű háromszögben jelöljük a tompaszög csúcsát A -val, a másik két csúcsot B -vel, C -vel, és A_0 , B_0 , C_0 rendre a velük szemközti oldalfelező pontot, A_1 , B_1 , C_1 pedig a megfelelő magasságszakaszok felezőpontját jelölje. Ekkor a B -ből, C -ből induló magasságszakaszok a BC egyenes A -t tartalmazó oldalán, a háromszögön kívül futnak. Emiatt B_1C_1 az A_0C_0 , A_0B_0 szakaszok C_0 -on, illetve B_0 -on túli meghosszabbításán van; vagyis a B_0C_0 egyenes A felőli oldalán. Mivel A_1 a B_0C_0 szakaszon van, nem lehet rajta a B_1C_1 egyenesen.

Ezzel beláttuk, hogy ha $A_1B_1C_1$ egy egyenesen van, akkor a háromszög csak derékszögű lehet.

Osgyáni Zsuzsanna (Tata, Eötvös J. Gimn., III. o. t.)

Megjegyzések. 1. Jelöljük egy adott háromszöggel kapcsolatban E -vel azt az állítást, hogy a magasságszakaszok felezőpontjai egy egyenesbe esnek, és D -vel azt az állítást, hogy a háromszög derékszögű. Nekünk azt a harmadik állítást kellett igazolnunk, hogy E -ből következik D . A megoldásban ezt a harmadik állítást úgy igazoltuk, hogy megmutattuk, ha D nem igaz, akkor E sem igaz. A matematikai logikában járatlan olvasó most biztosan azt mondja, hogy ez hiányos. Esetünkben semmi akadálya belátni, hogy D -ből következik E , hiszen ha A -ban van a derékszög csúcsa, akkor B_1 és C_0 , valamint C_1 és B_0 azonosak. Erre azonban elvileg semmi szükség nincs, a legtöbb, amit a bizonyítástól elvárhatunk, az, hogy azt is megmutatta, hogy van olyan háromszög, amelyben E igaz. Ez utóbbit úgy mondjuk, hogy E „nem üres”.

2. Megoldásunk alapja az a szemléletesen világos észrevétel volt, hogy ha egy egyenes egy háromszög valamelyik oldalszakaszát annak valamely belső pontjában metszi, és nem megy át a harmadik csúcson, akkor a másik két oldalszakasz közül pontosan csak az egyiket metszheti belső pontjában. Ez azért van így, mert a harmadik csúcs az első két csúcs közül pontosan csak az egyikkel kerülhet az egyenesnek ugyanarra az oldalára.