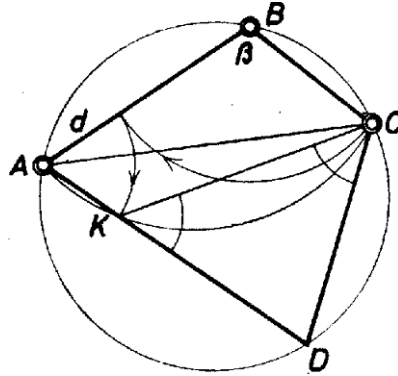


Egy négyszög akkor húrnégyszög, ha írható köréje kör. Mivel 3 pont a kört meghatározza, D -t úgy kell megválasztanunk, hogy rajta legyen az A, B, C pontok által meghatározott körön. E kört mindig meg tudjuk szerkeszteni, ha a 3 pont nem esik egy egyenesbe.

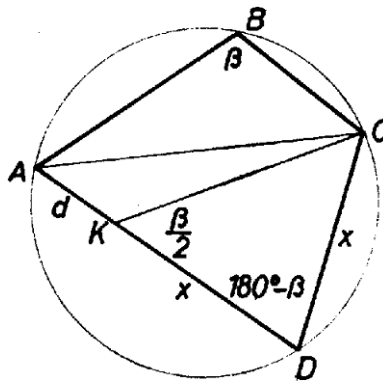
Mivel a négyszög érintőnégyszög is, ezért szemközti oldalainak összege egyenlő, így $AB + CD = BC + AD$, azaz átrendezve $|AD - CD| = |AB - BC| = d$. Mivel A, B, C, D a megadott sorrendben határozza meg a négyszöget, a D pontot a B -t nem tartalmazó AC íven kell keresnünk.

Feltehetjük, hogy $AB > BC$ (ha nem így lenne, betűzzük át a pontokat), akkor az oldalösszegekre fennálló egyenlőség miatt $AD > CD$, és különbségük $-d$ – ismert.



Tekintsük négyszögünket megszerkesztettnek, és mérjük fel A -ból az AD szakaszra a d távolságot. Jelöljük a végpontját K -val. A CKD háromszög egyenlő szárú, D csúsnál levő szöge ismert, hiszen az $ABC \sphericalangle = \beta$ -t 180° -ra egészíti ki. Így a $DKC \sphericalangle = \frac{180^\circ - (180^\circ - \beta)}{2} = \frac{\beta}{2}$. Az AKC háromszög tehát megszerkeszthető 2 oldala és a nagobbikkal szemben levő szöge ismeretében.

A négyszög szerkesztésének menete a következő: az A, B, C pontok köré kört szerkesztünk, majd az AC oldal fölé $180^\circ - \frac{\beta}{2}$ látószögű kört. Ezt A -ból d távolsággal elmozdítva kapjuk a K pontot. Az AK egyenes metszi ki a körből D -t.



Az így kapott négyszög valóban húrnégyszög, de egyben érintőnégyszög is. Könnyen kiszámolhatjuk a $DCK \sphericalangle$ -t

$$DCK \sphericalangle = 180^\circ - \left(\frac{\beta}{2} + 180^\circ - \beta \right) = \frac{\beta}{2}.$$

A CDK háromszögben $CD = DK = x$, így $AB + CD = AB + x$, $BC + AD = BC + d + x$, és mivel $AB = BC + d$, a két összeg valóban egyenlő. Ez pedig szükséges és elégséges feltétele annak, hogy egy négyszög érintőnégyszög legyen.

A feladatnak mindig van megoldása, ha A, B, C nem esik egy egyenesbe, és mindig 1 megoldása van, mivel $d = |AB - BC| < AC$ mindig teljesül a háromszög oldalaira fennálló összefüggés miatt. Ha $AB = BC$, akkor a húrnégyszög deltoid, és D -t a B -ből az AC -ra állított merőleges metszi ki a körből.

Alberti Gábor (Budapest, Árpád Gimn., I. o. t.)