

Legyen f a locsolkodó fiúk, n pedig az egy üvegben levő cseppek száma. Ekkor egy fiú $\frac{n}{2} - 15$ csepp kölnit locsolt a mamára. Emiatt

$$(1) \quad \begin{aligned} f \cdot \left(\frac{n}{2} - 15 \right) &> -3n, \text{ vagyis} \\ \frac{6n}{n-30} &< f. \end{aligned}$$

A lányokra vonatkozó feltétel nem egyértelmű. Ha például minden fiúnak ugyanaz a lány tetszett, akkor ő $f \cdot n/2$ csepp kölnit kapott, ami szintén több, mint három üveg. Adott f esetén sem mindegy, hogy az egyes lányokat hányan választják. A feladat csupán a kölnisüvegre kíváncsi, a többi körülményt mi szabadon változtathatjuk a feltételekkel összeegyeztethetően.

Helyettesítsük egyelőre a lányokra vonatkozó feltételt egy gyengébb, de jobban kezelhető kikötéssel. Egy lányra sem jutott $3n$ cseppnél több, így a négy lányra összesen legfeljebb $12n$ csepp jutott. Így, mivel egy fiú a négy lányra összesen $\frac{n}{2} + 15$ csepp kölnit locsolt: $f \cdot \left(\frac{n}{2} + 15 \right) \leq 12n$, ahonnan kapjuk, hogy

$$(2) \quad f \leq \frac{24n}{n+30}.$$

(1) és (2) együtt a

$$(3) \quad \frac{6n}{n-30} < f \leq \frac{24n}{n+30}$$

egyenlőtlenségláncot jelenti, ahonnan kapjuk, hogy

$$\frac{6n}{n-30} < \frac{24n}{n+30},$$

vagyis $n > 50$. Tehát egy üvegbe legalább 51 csepp kölni szükséges. De okoskodásunk nem megfordítható, így további finomításra van szükség.

Ha $n > 50$, akkor $\frac{6n}{n-30} < 15 < \frac{24n}{n+30}$, így található (3)-at kielégítő f egész szám. Ha (3)-t egy kicsit átalakítjuk:

$$(3') \quad 6 + \frac{180}{n-30} < f \leq 24 - \frac{720}{n+30},$$

akkor azt is látjuk, hogy a $7 \leq f \leq 23$ értékek bármelyike kielégíti (3)-t elég nagy n esetén. Nekünk arra az f értékre van szükségünk, amikor n a lehető legkisebb. Figyelembe kell vennünk azonban, hogy (2) és így (3) jobb oldala nem egyenértékű a lányokra vonatkozó feltétellel. Ha például $f \geq 21$, akkor elég nagy n -re ($f = 21$ esetén $n \geq 210$) (3) fennáll, de bármilyen is a fiúk ízlése, van olyan lány, akit legalább hatan választottak, így ő már ezektől is legalább három üveg kölnit kapott. Ahhoz, hogy a lányokra vonatkozó feltételt megvalósíthassuk, a fiúk számát kicsire kell választanunk, hisz így érhető el, hogy egy lányt se válasszanak túl sokan. Ha viszont csökkentjük a fiúk számát, akkor a mama, azaz (1) miatt n -et növelnünk kell. Ahhoz, hogy például $f = 7$ kielégítse (1)-et, n -et legalább 211-nek kell választanunk, ez pedig túl nagy az előzetes $n > 50$ becsléshez képest.

Az $f = 15$ érték már lehetséges, ha $n > 50$. Ha tehát a fiúk 15-en voltak, akkor volt olyan lány, akit legalább négyen választottak. Ezekből legalább 2 üveg kölnit kapott, a többiektől 5–5 cseppet, így ő legalább $2n + 11 \cdot 5$ csepp kölnit kapott. Ez $n \leq 55$ esetén nem lesz több, mint 3 üveg, azaz $3n$ csepp kölni.

Így $f = 15$ esetén minimálisan 55 csepp szükséges. Ez már meg is valósítható, amennyiben három lányt négyen, egyet pedig hárman locsoltak meg.

Meg kell néznünk, hogy ha $50 < n < 55$, akkor (1) lehetővé teszi-e a fiúk számának csökkentését.

Mivel (1) bal oldala monoton fogyó, elegendő $n = 54$ -et vizsgálni. Ekkor (1) szerint $f > 13,5$, így 13 vagy annál kevesebb fiú esetén $n \leq 55$ (valóban ekkor $n \leq 56$), így ekkora csökkentés már nem ad jobb eredményt.

Ha $f = 14$, akkor (1) alapján $14 > \frac{6n}{n-30}$, vagyis $n > 52,5$. Így ha $n \leq 53$, akkor (1) teljesül. Másrészt most is elérhető, hogy egy lányt se válasszanak 4-nél többen – például három lányt négyen, egyet pedig ketten – és így a legillatosabb leány is $4 \cdot \frac{2}{n} + 10 \cdot 5 = 2n + 50$ csepp kölnit kapott, ami $n \leq 53$ esetén három üvegnél kevesebb.

Tehát az adott feltételek esetén egy üvegben legalább 53 csepp kölni volt, és ez lehetséges is, amennyiben 3 lányt 4–4 fiú, egyet pedig két fiú locsolt meg.