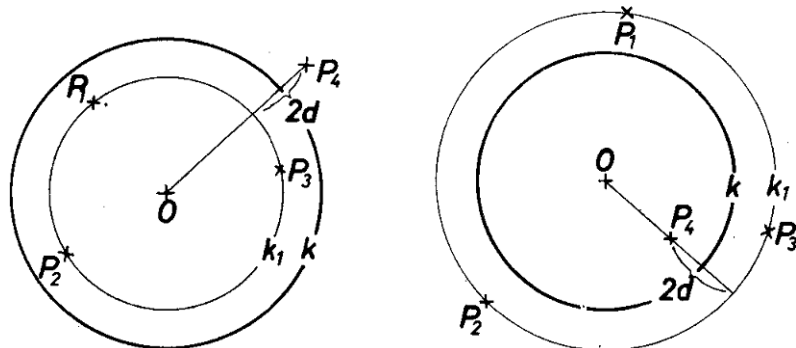


Jelöljük a pontokat P_1, P_2, P_3 és P_4 -gyel, a feltételt kielégítő kört k -val, sugarát r -rel és a pontoktól való távolságát d -vel. A négy pont mindegyike nem lehet a k körön kívül, mert akkor k középpontjától való távolságuk $r + d$ lenne, ami azt jelentené, hogy a 4 pont egy körön van, ami ellentmond a feltételnek. Hasonlóképpen nem lehet a 4 pont mindegyike a k körön belül sem. A pontok tehát a k körhöz képest a következőképpen helyezkednek el: vagy 3 a k körön belül van és egy kívül (vagy fordítva), vagy 2 a körön belül, 2 pedig kívül van. Vizsgáljuk meg mindkét esetben a lehetséges megoldások számát.

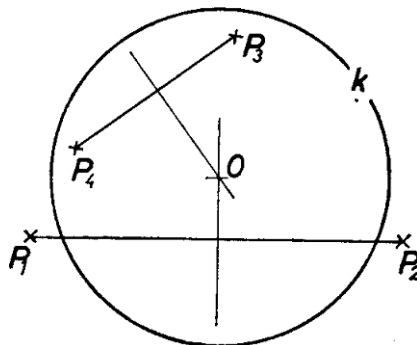
Először válasszunk ki 3 pontot, mivel ezek nincsenek egy egyenesen, meghatároznak egy k_1 kört, melynek sugara r_1 . Ezután olyan kört kell szerkesztenünk, amelyik k_1 -től is és a negyedik ponttól is egyenlő távolságra van. Ez nyilván egyközepű lesz k_1 -gyel, és sugara $r_1 + d$, ha P_4 a k_1 -en kívül van (1. ábra), illetve $r_1 - d$, ha P_4 k_1 -en belül, ahol d fele akkora, mint P_4 -nek a k_1 körtől való távolsága. Az így kapott k kör eleget tesz a feltételnek, hiszen mindegyik ponttól d távolságra van. Ily módon annyi megoldást kapunk, ahányféleképpen 4 pont közül ki tudunk választani 3-at. Ez 4 lehetőség.



1. ábra

Most vizsgáljuk azt az esetet, amikor két pont a keresett k körön kívül fekszik, legyen ez P_1, P_2 és kettő belül, P_3, P_4 . P_1 és P_2 -nek k -tól való távolsága most $r + d$, P_3 és P_4 -nek $r - d$. Két ponton átmenő kör középpontja mindig rajta van a két pont által meghatározott szakasz felező merőlegesén, ha tehát meghúzzuk a két kiválasztott szakasz felező merőlegesét, ezek metszéspontja – amennyiben létrejön – megadja a k kör O középpontját, hiszen k most is egyközepű a P_1, P_2 , ill. P_3, P_4 ponton átmenő körökkel, és sugara O -nak a szakaszok végpontjától vett távolságainak számtani közepe (2. ábra). A 4 pont összesen 3 különböző szakaszpárt határoz meg, a feladatnak így legfeljebb még 3 megoldását kapjuk. Ha a 4 pont paralelogrammát alkot, akkor csak 1 megoldás van – hacsak nem négyzet vagy téglalap, de ezt a feladat szövege kizárta –, mert a párhuzamos oldalak felező merőlegesei nem metszik egymást. Trapéz esetén 2 megoldást kapunk, kivéve ha a trapéz szimmetrikus, akkor a felező merőlegesek egybeesnek és végtelen sok megoldás van. De mivel a szimmetrikus trapéz köré írható kör, ezt az esetet is kizárja a feladat szövege.

Összesen tehát legfeljebb 7 megoldás lehetséges.



2. ábra